

Clase 1

1. Sea (X, d) un espacio métrico. Se define en $X \times X$ la función $d'(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$. Demuestre que (X, d') es un espacio métrico.
2. Sea $C([0, 1], \mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones continuas del intervalo $[0, 1]$ en \mathbb{R} . Sea $f, g \in C([0, 1], \mathbb{R})$.

a) Pruebe que las siguientes funciones son métricas:

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)| \\ \rho(f, g) &= \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt \\ \sigma(f, g) &= \sqrt{\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt} \end{aligned}$$

Indicación: Puede serle útil recordar que $\left(\int_0^1 f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \int_0^1 f^2(t)dt \cdot \int_0^1 g^2(t)dt$

b) Pruebe que $d(f, g) \geq \sigma(f, g) \geq \rho(f, g)$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$ se define:

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

y sea $f(t) = 0 \forall t \in [0, 1]$

Pruebe que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f si $n \rightarrow \infty$ en $(C([0, 1], \mathbb{R}), \sigma)$.

¿ Sucede lo mismo en $(C([0, 1], \mathbb{R}), d)$ o en $(C([0, 1], \mathbb{R}), \rho)$?

3. Sea E el espacio vectorial de los polinomios de grado menos o igual a n . En E se define la función $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ por: $N(p) = \int_0^1 |p'(t)|dt + |p(0)|$.

a) Pruebe que N es una norma en E .

b) Encuentre $L \in \mathbb{R}$ tal que $\forall p \in E$ $N(p) \leq L \cdot \max |a_i|$ con $i = 0, \dots, n$ donde $p(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$

4. Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde \mathbb{R}^n esta dotado de una norma $\|\cdot\|$. Se dice que F es contractante si $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $0 < k < 1$ y $\|F(x) - F(y)\| \leq k\|x - y\| \forall x, y \in \mathbb{R}^n$. En lo que sigue F será una función contractante.

Considere la sucesión definida por $x_{n+1} = F(x_n)$:

a) Demuestre que $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\| \forall n \in \mathbb{N}$

b) Pruebe que $\|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\| \forall p \in \mathbb{N}$. Concluya que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es Cauchy.

- c) Demuestre que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un x^* tal que $F(x^*) = x^*$ (llamado Punto Fijo de F)
- d) Demuestre que x^* es único.

Una noción de Productos Internos

Definición: Sean V un espacio vectorial sobre \mathbb{C} o \mathbb{R} . Una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es un producto interno en V si $\forall x, y, z \in V$ y $c \in \mathbb{C}$ o \mathbb{R} :

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
2. $\langle cx, y \rangle = c \langle x, y \rangle$
3. $\langle x, x \rangle > 0$ y $\langle x, x \rangle = 0$ si $x = 0$
4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Algunos ejemplos:

1. En \mathbb{R}^n , $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
2. En \mathbb{C}^n , $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$
3. En $(C([a, b], \mathbb{C}), \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$

Una propiedad interesante es que dado un producto interno en V se puede definir una norma en V como $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Estos son sólo aspectos muy básicos sobre los productos internos. Si se desea profundizar un poco más el tema visitar <http://www.maths.mq.edu.au/%7ewchen/lnlafolder/lfa04-ips.pdf>

Ejercicios:

1. Demuestre la desigualdad de Cauchy-Schwartz, es decir que $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$.
2. Un espacio vectorial normado se dice **completo** si todas las sucesiones de Cauchy convergen en dicho espacio. Por otro lado, un espacio vectorial H dotado de un producto interno se llama **Espacio de Hilbert**, si H dotado de la norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ es completo.

Considere el espacio vectorial $\ell^2 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ y el producto interno $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Demuestre que ℓ^2 es un espacio de Hilbert.

3. Demuestre que el espacio de funciones $(C([a, b], \mathbb{R}))$ es completo con la norma $\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$