PROBLEMA 1:

(i).- (1.5 pts) Expresar de la forma $a + bi$ los siguientes complejos

$$(1-i)^4(1+i)^4\,, \qquad \text{y} \qquad 1+i+\frac{i-1}{|1-i|^2+i}\,.$$

(ii).- (3.0 pts) Sea $m \in \mathbb{N}$. Escriba $(1+i\sqrt{3})/2$ en forma $\rho e^{i\theta}$ y pruebe que

$$6 \,|\, m \iff \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m + \left(-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m = 2\,.$$

Indicación: para probar $\Longleftarrow$ estudie que pasa si m es par o impar.

PROPUESTO

(iii).- (1.5 pts) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \rho \in \mathbb{R}$, $(1-\rho e^{i\frac{\pi}{2}})^n + (1+\rho e^{i\frac{\pi}{2}})^n \in \mathbb{R}$

PROBLEMA 2:

Calcule todas las soluciones complejas de la ecuación $z^n = -1$ para $n \geq 2$.

Pruebe que la suma de las soluciones obtenidas en la parte i es cero.

Indicación: Recuerde que $\sum\limits_{k=0}^{m} r^k = \frac{1-r^{m+1}}{1-r}$ si $r \neq 1$.

PROPUESTO

Encuentre todas las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de la ecuación

$$\left(\frac{z^4+3}{z^4}\right)^2 + \left(\frac{z^4+3}{z^4}\right) - 2 = 0.$$