Descomposición de matrices LU y LDU

Ésta permite descomponer una matriz en la multiplicación de otras (dos o tres según sea el caso), las cuales cuentan con propiedades especiales, dado que son triangulares. Veamos de donde viene esto:
Supongamos que queremos escalonar la siguiente matriz:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

se tendrá entonces:

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow[(3)-(1)]{}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow[(3)-(2)]{}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}=\tilde{A}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{A}=E_{2,3}(-1,1)\cdot E_{1,3}(-1,1)\cdot A$$

Es decir, es la multiplicación de A por matrices elementales. Dicha nomenclatura quiere decir:

$E_{p,q}(\alpha,\beta)$: equivale a sumar la fila $(p)\cdot\alpha$ a la fila $(q)\cdot\beta$.

Para el escalonamiento estándar $\beta=1$. Luego para obtener la matriz A nuevamente, se multiplica por las inversas, en este caso:

$$\Rightarrow A=\left(E_{1,3}(-1,1)\right)^{-1}\cdot\left(E_{2,3}(-1,1)\right)^{-1}\cdot\tilde{A}=E_{1,3}(1,1)\cdot E_{2,3}(1,1)\cdot\tilde{A}$$

Esto dado que cuando $\beta=1$ al invertir sólo se cambia el signo de α

Luego:

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

identificando se tiene entonces:

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}=L\cdot U$$

Es decir una triangular inferior por una triangular superior, además se puede separar también U en dos matrices.

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L \cdot D \cdot U$$

Esto utilizando el hecho de que una diagonal multiplicando por la izquierda amplifica las columnas.
Por último es necesario que el escalonamiento de A se realice si permutaciones de filas y columnas, o sea, todos lo elementos diagonales de A (pivotes) deben ser $\neq 0$.
Para que sirve la descomposición LU? Para simplificar la resolución de sistemas lineales, pues trabajar con un sistema triangular es ostensiblemente más simple. Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sistema ostensiblemente más simple de resolver:

$$\Rightarrow a = 0$$
$$\Rightarrow b = 1$$
$$\Rightarrow c = 2$$

luego el sistema anterior queda:

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow z = -1$$
$$\Rightarrow y = 2$$
$$\Rightarrow x = 1$$

Propiedades

- Si $A = L \cdot D \cdot U$, la descomposición es única
- Si A es simétrica y $A = L \cdot D \cdot U \Rightarrow U = L^T \Leftrightarrow A = L \cdot D \cdot L^T$

Los problemas de este tipo no presentan mayor dificultad que el ejemplo dado, podrán encontrar ejercicios para ejercitar en la guía 3 para el control.