

## Ejemplo de modelo usando generación de columnas

A continuación consideramos el problema conocido como *Cutting stock problem*. Analizaremos un modelo basado en generación de columnas para este problema y un ejemplo numérico.

### El ejemplo: Cutting stock problem

Una empresa vende rollos de papel de  $k$  distintos anchos  $a_1, a_2, \dots, a_k$  a sus clientes. Para fabricarlos, la empresa compra rollos de un ancho  $b$  fijo y los corta en los tamaños finales. El largo de los rollos aquí no nos interesa (son todos los rollos del mismo largo).

Dada una demanda por  $d_i$  rollos de ancho  $a_i$ , se debe determinar cuántos rollos de ancho  $b$  y cómo cortarlos de modo a satisfacer los pedidos y minimizar el desperdicio (lo que sobra de los rollos iniciales una vez cortado los rollos finales).

### Un modelo de generación de columnas

La técnica de generación de columnas se utiliza para resolver problemas de programación lineal donde las columnas del modelo no son conocidas todas con anterioridad (puede ser porque realmente no se conocen o porque se decidió por un modelo de este tipo).

En caso que lo que se quiera resolver sea un problema lineal entero, se debe recurrir a los algoritmos de tipo Branch-and-Price.

En lo que sigue, consideramos la idea de armar el modelo pensando en que se va a resolver usando generación de columnas o Branch-and-Price.

Para modelar el ejemplo enunciado antes debemos plantear:

- Un problema maestro (este es el problema de optimización que representa las decisiones que se quieren tomar) de estructura relativamente simple y cuyas columnas “tengan sentido”. En este caso, cada columna representará un patrón de corte factible para un rollo inicial en rollos finales. A cada columna (patrón) le corresponde, en este problema maestro, una variable entera no negativa que dice cuántos rollos iniciales deben ser cortados de esta forma.
- El subproblema. Este es el problema de determinar si alguna de las columnas no consideradas hasta ahora tiene el costo reducido negativo y por lo tanto podría entrar a la base del método Simplex y mejorar la solución actual.

Esquemáticamente el algoritmo que se utiliza para resolver estos modelos es el siguiente:

Inic.: Generar un conjunto inicial de columnas y construir el primer problema maestro usando estas columnas.

- Iter.: – Resolver el problema lineal maestro actual.
- Resolver el subproblema para verificar si hay columnas con el costo reducido que indique que conviene que entren en la base. En caso negativo, la solución actual es óptima, PARAR. En caso afirmativo, generar al menos una columna de estas y agregarla al problema maestro. Pasar a la próxima iteración.

## El problema maestro

Una vez que definimos que cada columna de la matriz corresponde a un patrón de corte, tenemos un “parámetro”  $p_{ij}$  que dice cuántos rollos de ancho  $i$  se cortan en el patrón (columna)  $j$ .

Con esto, recordando que hay una demanda  $d_i$  para los rollos de ancho  $a_i$  y definiendo el costo de la columna  $j$  como el ancho desperdiciado en el patrón asociado, es decir  $c_j = b - \sum_{i=1}^k a_i p_{ij}$ , se puede plantear el siguiente problema maestro:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_j c_j x_j \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^k p_{ij} x_j = d_i \quad \text{para todo } i = 1, \dots, k \\ & x_j \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{para todo } j. \end{aligned}$$

## El subproblema

El subproblema consiste en generar columnas que, dada la solución óptima con las columnas generadas hasta este momento, tengan costo reducido negativo (estamos en un problema de minimización) o probar que no hay.

Para esto buscamos la columna con menor costo reducido: si este costo reducido es negativo, la columna obtenida es de las que estamos buscando. Por otro lado, si el costo reducido mínimo es no negativo, quiere decir que no hay columnas con costo reducido negativo y por lo tanto la solución que se tiene es óptima.

Llamemos  $\pi_i$  al valor de la variable dual asociada a la restricción  $i$  (en el ejemplo,  $\pi_i$  es la variable dual asociada a la condición de satisfacción de la demanda de rollos de ancho  $a_i$ ).

De esta manera, el costo reducido de la variable (columna)  $j$  en la solución actual puede ser calculado como:

$$\begin{aligned} \bar{c}_j &= c_j - \sum_{i=1}^k \pi_i p_{ij} \\ &= b - \sum_{i=1}^k a_i p_{ij} - \sum_{i=1}^k \pi_i p_{ij} \\ &= b + \sum_{i=1}^k (-a_i - \pi_i) p_{ij} \end{aligned}$$

Además, una columna representa un patrón de corte, por lo tanto todas las piezas del patrón deben caber en el rollo inicial. Es decir, se debe satisfacer  $b \geq \sum_{i=1}^k a_i p_{ij}$ .

De todo esto tenemos que el problema de generación de columnas es el siguiente problema de la mochila (las variables de decisión son los  $p_{ij}$ ,  $j$  está fijo: es el índice de la columna que estamos por generar):

$$\begin{aligned} \min \quad & b + \sum_{i=1}^k (-a_i - \pi_i) p_{ij} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^k a_i p_{ij} \leq b \\ & p_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{para todo } i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

## Un ejemplo numérico

Consideremos un caso simple donde el ancho del rollo inicial es  $b = 10$  y hay sólo dos tipos de rollos finales, de anchos  $a_1 = 3$  y  $a_2 = 4$ .

Las demandas son  $d_1 = d_2 = 4$ . Inicialmente partimos con las columnas  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , es decir, con las columnas que corresponden a cortar un único rollo en cada rollo original. Ponemos una columna para cada ancho final posible.

El problema maestro resultante es:

$$\begin{aligned} \min \quad & 7x_1 + 6x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 = 4 \\ & x_2 = 4 \end{aligned}$$

La solución óptima de ese problema es la única solución factible (por ahora)  $x = (4, 4)$ . En este punto, las variables duales valen:  $\pi_1 = 7$ ,  $\pi_2 = 6$ .

El subproblema en este punto es entonces (denotamos las  $p_{ij}$  solo por  $p_i$ ),

$$\begin{aligned} \min \quad & 10 + (-3 - 7)p_1 + (-4 - 6)p_2 = 10 - 10p_1 - 10p_2 \\ \text{s.a.} \quad & 3p_1 + 4p_2 \leq 10 \\ & p_1, p_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

Una solución óptima para este problema es  $p_1 = 3$ ,  $p_2 = 0$  con valor objetivo igual a -20. Esto nos dice que no estamos en el óptimo y que podemos agregar la columna  $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$  que acabamos de generar, con costo  $c_3 = 1$ .

El nuevo problema maestro es

$$\begin{aligned} \min \quad & 7x_1 + 6x_2 + x_3 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 3x_3 = 4 \\ & x_2 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Una solución óptima básica para este problema es:  $x_2 = 4$ ,  $x_3 = 4/3$ . Las variables duales son  $\pi_1 = 1/3$ ,  $\pi_2 = 6$ .

El nuevo subproblema es,

$$\begin{aligned} \min \quad & 10 + (-3 - 1/3)p_1 + (-4 - 6)p_2 = 10 - (10/3)p_1 - 10p_2 \\ \text{s.a.} \quad & 3p_1 + 4p_2 \leq 10 \\ & p_1, p_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

Una solución óptima para este problema es  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = 2$  con valor objetivo igual a -10. Esto nos dice que todavía no hemos llegado al óptimo y que podemos agregar la columna  $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$  que acabamos de generar, con costo  $c_3 = 2$ . El nuevo problema maestro es

$$\begin{aligned} \min \quad & 7x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 3x_3 = 4 \\ & x_2 + 2x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Se resuelve este problema maestro y se resuelve el subproblema para generar más columnas y así se sigue hasta que en alguna iteración no se generen columnas con costo reducido negativo.

**Ejercicio.** Verificar los cálculos del ejemplo y continuar iterando hasta encontrar el óptimo.