DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN70L - Logística y Producción
Sem.: Otoño 2005
Prof: Andrés Weintraub.
P. Aux: Jaime Miranda

PAUTA EJERCICIO # 2
LOGÍSTICA Y PRODUCCIÓN - OTOÑO 2005

Problema 1

1. Modelo de programación lineal entero (1 pto.):

   La formulación es la siguiente:

   - **Variables:**
     - x_i: Cantidad de autos producidos del modelo i.
   - **Restricciones:**
     - Uso de materias primas:

$$\sum_i M_{ij} x_i \leq TB_j \qquad \forall i.$$

     - Naturaleza de las variables:

$$x_i \geq 0 \qquad \forall i$$
$$x_i \in N \qquad \forall i$$

   - **Función Objetivo**

$$\text{Max } z = \sum_i p_i x_i$$

2. Con la instancia entregada el problema es el siguiente (1 pto.):

$$\begin{array}{lrcl} & Max: z = 5x_1 + 8x_2 & & \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \text{ y enteros} \end{array}$$

3. Resolución de la instancia (4 pts.):

   Lo primero que debemos hacer es inicializar el incumbente en $\bar{z} = \infty$ e inicializar la lista de problemas pendientes con la relajación lineal del problema:

$$\begin{array}{lrcl} & (P_0) \text{ máx } z = 5x_1 + 8x_2 & & \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Como es el único problema que hay en la lista, lo resolvemos obteniendo la siguiente solución óptima: $z_0 = 41{,}25$; $x_1 = 2{,}25$ y $x_2 = 3{,}75$ [1]. Notamos que las 2 variables son fraccionarias por lo que podemos tomar cualquiera de ellas como variable de ramificación. La solución encontrada en la relajación lineal es mejor que la solución encontrada por la solucíon entera, el único caso que distinto es que sean iguales.

4. Escojamos la variable x_2 para ramificar generandose así los siguientes problemas:

$$
\begin{array}{llcl}
(P_1) & \text{máx } z = 5x_1 + 8x_2 & & \\
\text{s.a} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\
 & 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\
 & x_2 & \geq & 4 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llcl}
(P_2) & \text{máx } z = 5x_1 + 8x_2 & & \\
\text{s.a} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\
 & 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\
 & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Tenemos ahora que la lista esta compuesta por 2 problemas pendientes: L=$\{(P_1),(P_2)\}$. Sin embargo, aún no encontramos una solución entera por lo que no actualizamos el incumbente.

Resolviendo primero (P_1), se tiene que $z_1 = 41$; $x_1 = 1{,}8$ y $x_2 = 4$, que tampoco es solución entera por lo que ramificamos nuevamente por variable x_1, dando origen a los problemas:

$$
\begin{array}{llcl}
(P_3) & \text{máx } z = 5x_1 + 8x_2 & & \\
\text{s.a} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\
 & 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\
 & x_2 & \geq & 4 \\
 & x_1 & \geq & 2 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llcl}
(P_4) & \text{máx } z = 5x_1 + 8x_2 & & \\
\text{s.a} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\
 & 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\
 & x_2 & \geq & 4 \\
 & x_1 & \leq & 1 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Tenemos como problemas pendientes L=$\{(P_2),(P_3),(P_4)\}$ y aun ninguna solución entera. Escogemos (P_3) para ser resuelto obteniendo que es infactible. Esto significa que eliminamos a (P_3) sin ser ramificado.

Ahora es necesario escoger entre los elementos de la lista pendientes L=$\{(P_2),(P_4)\}$. Escogemos (P_4) para ser resuelto obteniendo que $z_4 = 40{,}55$; $x_1 = 1$ y $x_2 = 4{,}44$. Nuevamente no tenemos una solución entera y por lo tanto debemos ramificar según variable x_2 dando paso a los siguientes problemas:

$$
\begin{array}{llcl}
(P_5) & \text{mín } z = 5x_1 + 8x_2 & & \\
\text{s.a} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\
 & 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\
 & x_2 & \geq & 4 \\
 & x_1 & \leq & 1 \\
 & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llcl}
(P_6) & \text{mín } z = 5x_1 + 8x_2 & & \\
\text{s.a} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\
 & 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\
 & x_2 & \geq & 4 \\
 & x_1 & \leq & 1 \\
 & x_2 & \geq & 5 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Notamos que el espacio factibles de (P_6) es sólo el punto $(x_1 = 0, x_2 = 5)$ y el de (P_5) es el segmento de recta que une el punto $(0,4)$ con el punto $(1,4)$. Si se resuelve (P_5) se obtiene la primera solución entera: $z_5 = 37$; $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$ por lo que actualizamos el incumbente: $\bar{z} = 37$.

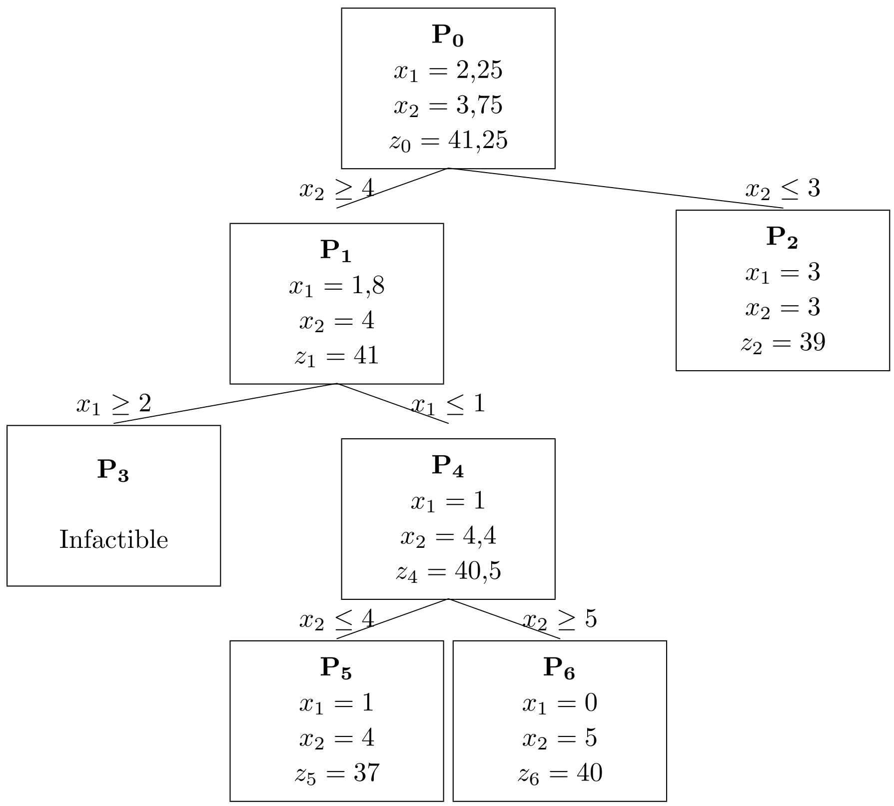
[1] En problemas reales, esta relajación debe ser resuelta mediante simplex, pero con fines académicos podemos resolver gráficamente

Ahora la lista es L=$\{(P_2),(P_6)\}$. Resolviendo (P_6) se tiene que $z_6 = 40$; $x_1 = 0$ y $x_2 = 5$, que es una solución entera mejor que la anterior por lo que actualizamos el incumbente: $\bar{z} = 40$.

Resolviendo finalmente el último problema de la lista: (P_2) se obtiene que $z_2 = 39$; $x_1 = 3$ y $x_2 = 3$, que es una solución entera peor que la del incumbente por lo cual no es necesario ramificar.

Como no quedan problemas en la lista, hemos encontrado que el óptimo entero del problema viene dado por $z^* = 40$; $x_1^* = 0$ y $x_2^* = 5$

El árbol final es el que se muestra en la figura.



Observación: Si la solución de P_2 hubiera tenido $z_6 = 39$ y solución fraccionaria tampoco hubieramos ramificado porque hubiese tenido un valor de la función objetivo peor que la del incumbente por lo que todos los problemas hijos tendrian una solución peor que la mejor que ya tenemos.

Observación: Notar la gran cantidad de cálculos que deben realizarse para la resolución de un problema entero incluso para problemas de tamaño reducido. En la practica, la restricciones de cálculo computacional están dadas por el número de variables enteras que tiene el problema. Tanto es así que muchos problemas no pueden ser resueltos con un computador razonable por lo cual se construyen heurísticas de redondeo.

⊙