

# CONSUMO Y AHORRO

EDUARDO ENGEL

Primera versión: Marzo, 1998

Esta versión: 23 de Mayo, 2001

# 1 Motivación<sup>1</sup>

## 1.1 Un poco de historia

1. La macroeconomía moderna comienza en 1936 con la publicación del libro “A General Theory of Employment, Interest and Money” de John Maynard Keynes (1883–1946).
2. Mientras estaba escribiendo su obra, Keynes confidenció a George Bernard Shaw:

*I believe myself to be writing a book on economic theory which will largely revolutionise —not, I suppose at once but in the course of the next ten years— the way the world thinks about economic problems.*

3. La predicción de Keynes resultó ser cierta. El momento de la publicación del libro de Keynes de seguro fue uno de los motivos para su éxito.
4. A mediados de los treinta, antes de la publicación de la *Teoría General*, prácticamente no existía una explicación coherente para la Gran Depresión, tanto por su duración como por lo profunda que fue. Las medidas del gobierno de Roosevelt en los Estados Unidos (el *New Deal*) estuvieron basadas en intuiciones más que en teoría económica.
5. La *Teoría General* ofreció una interpretación de los eventos, un marco intelectual y un argumento claro en favor de la intervención del gobierno.
6. El elemento central de la *Teoría General* fue el concepto de *demanda efectiva*, lo que hoy llamamos demanda agregada. Keynes argumentó que en el corto plazo la demanda efectiva determina el producto. Aún si el producto retorna a su nivel natural en el largo plazo, el proceso en el mejor de los casos es lento. De hecho, una de las citas más conocidas de Keynes es:

*En el largo plazo estamos todos muertos.*

7. En el proceso de derivar la demanda efectiva, Keynes introdujo muchos de los conceptos básicos de la macroeconomía moderna:
  - El multiplicador, que explica por qué shocks de demanda pueden ser amplificados llevando a shocks mayores al producto.
  - El concepto de *preferencias de liquidez*, el nombre que Keynes dio a la demanda por dinero, que explica cómo la política monetaria puede afectar las tasas de interés y la demanda efectiva.
  - La importancia de las expectativas en la determinación del consumo y la inversión.
  - La idea que los “espíritus animales”<sup>2</sup> (cambios en las expectativas) son un factor importante para explicar las fluctuaciones de la demanda y el producto.
8. Finalmente, la *Teoría General* fue mucho más que un libro para economistas. Ofreció prescripciones de política claras y a tono con los tiempos. Esperar sin hacer nada hasta que la economía regresara a su nivel natural era irresponsable. Tratar de equilibrar el presupuesto fiscal en medios de la depresión no sólo era estúpido, era peligroso.

---

<sup>1</sup>Sección basada en el capítulo 30 de *Macroeconomics* de Olivier Blanchard, Prentice–Hall, 1997.

<sup>2</sup>En inglés *animal spirits*.

9. Dentro de pocos años la *Teoría General* había transformado la macroeconomía.
10. A mediados de la década de los cincuenta había emergido un consenso, conocido como la *síntesis neoclásica*, el cual había integrado varias de las ideas de Keynes con las ideas de economistas que le precedieron. Paul Samuelson, en la edición de 1955 de su texto *Economics* —el primer texto moderno de economía— escribió:

*In recent years, 90 percent of American economists have stopped being “Keynesian economists” or “Anti-Keynesian economists.” Instead, they have worked toward a synthesis of whatever is valuable in older economics and in modern theories of income determination. The result [...] is accepted in its broad outlines, by all but about five percent of extreme left-wing and right-wing writers.*

11. La síntesis neoclásica continuó siendo la visión dominante por otros veinte años. El progreso fue impresionante, el período que va del comienzo de los años cuarenta al comienzo de los años setenta se puede considerar la edad dorada de la macroeconomía.
12. Lo primero que había que hacer luego de publicada la *Teoría General* era formalizar matemáticamente lo que Keynes había querido decir. Keynes sabía matemáticas<sup>3</sup> pero evitó usarla al escribir la *Teoría General*. Esto tuvo el efecto poco afortunado de dar lugar a interminables discusiones sobre qué había querido decir Keynes y si había errores lógicos en su argumentación.
13. Varias formalizaciones de las ideas de Keynes fueron desarrolladas. La más influyente fue el modelo IS–LM, desarrollado por John Hicks y Alvin Hansen hacia fines de los años treinta y comienzos de los cuarenta.
14. La versión original del modelo IS–LM —que de hecho es muy similar a la que se pasa en el curso IN41B— fue criticada por omitir varias de las ideas de Keynes: las expectativas no tenían rol alguno y el ajuste de precios y salarios estaba totalmente ausente. Sin embargo, el modelo IS–LM fue una base para comenzar a construir, y en ese sentido fue sumamente exitoso. La discusión se organizó en torno a las pendientes de las curvas IS y LM, qué variables faltaban en ambas relaciones, qué ecuaciones para salarios y precios debían agregarse al modelo, etc.
15. El modelo IS–LM resume las demandas por consumo e inversión mediante las relaciones  $C = C(Y)$  y  $I = I(r)$ .
16. Keynes enfatizó la importancia del comportamiento del consumo y la inversión. Hubo progresos importantes en estos temas bastante luego.
- En los años cincuenta Franco Modigliani (entonces en Carnegie–Mellon y ahora en MIT) y Milton Friedman (de la Universidad de Chicago) independientemente desarrollaron la teoría de consumo<sup>4</sup>. Ambos insistieron en la importancia de las expectativas en la determinación de las decisiones corrientes de consumo.
  - James Tobin, de Yale, desarrolló la teoría de inversión, basándose en la relación entre inversión y el valor presente de las utilidades<sup>5</sup>. Desarrollos posteriores importantes son de Dale Jorgenson, de Harvard, quien también testeó la teoría.

---

<sup>3</sup>De hecho, publicó un importante libro sobre probabilidades, *Treatise of Probabilities*, en 1921.

<sup>4</sup>Friedman recibió el Premio Nobel de Economía en 1976, Modigliani en 1985.

<sup>5</sup>Tobin recibió el Premio Nobel de Economía en 1981.

17. En esta parte del curso veremos las teorías de consumo e inversión, partiendo con los trabajos de Modigliani y Friedman en el primer caso, y de Tobin en el segundo, y llegando en ambos casos a estudiar las contribuciones más importantes de la última década.

## 1.2 Un poco de datos



Figura 1: Consumo privado como fracción del PIB

<sup>6</sup>El valor en el año  $t$  es la tasa de crecimiento entre  $t - 1$  Y  $t$ .

<sup>7</sup>En ambos casos la fuente de información es el Banco Central de Chile.

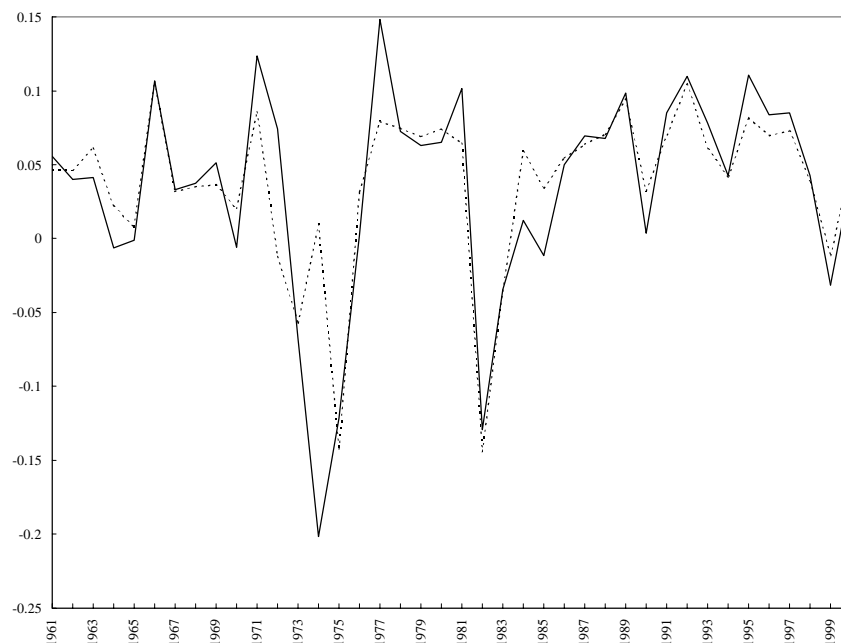


Figura 2: Tasa de crecimiento del consumo privado y del PIB

En este apunte queremos entender las variaciones del consumo privado (como fracción del PIB) y las diferencias entre las tasas de crecimiento del consumo privado y el PIB. También queremos entender por qué la tasa de crecimiento del consumo fluctúa más que la tasa de crecimiento del PIB (desviaciones standard de 3.1 y 2.7%, respectivamente).

### 1.3 Políticas públicas

Desde el punto de vista de las políticas públicas, el principal objetivo de este apunte es aportar recomendaciones de políticas para incentivar el ahorro<sup>8</sup>. Esto motiva enumerar las razones que se han dado en la literatura por las cuales la gente ahorra (la mayoría se remonta a Keynes [1936]). Acá van nueve razones:

1. Precaución: contingencias e imprevistos.
2. Ciclo de vida: para tener ingresos en el futuro, sobre todo al jubilar.
3. Sustitución intertemporal: para aprovechar fluctuaciones en los precios de los activos.
4. Mejoramiento: para tener un gasto creciente.
5. Independencia: para gozar del sentido de la independencia y poder hacer cosas.
6. Empresarial: para poder llevar a cabo proyectos empresariales, también para poder especular.
7. Herencia: para dejar activos a los hijos.

<sup>8</sup>La afirmación anterior supone que la gente ahorra menos de lo socialmente deseable, algo que, en estricto rigor, debiera demostrarse.

8. Avaricia.

9. Pago del pie de bienes durables: casa, auto, etc.

En este apunte veremos cómo se ha formalizado las intuiciones correspondientes a los puntos 1, 2, 3 y 7.

## 2 Consumo bajo certidumbre<sup>9</sup>

### 2.1 Supuestos y notación

1. Individuo que vive  $T$  períodos.
2.  $C_t$ : consumo en período  $t$ ;  $t = 1, \dots, T$ .
3. Función de utilidad:  $U = \sum_{t=1}^T u(C_t)$ . La función  $u(\cdot)$  se llama *función de utilidad instantánea*. Se le supone creciente y cóncava<sup>10</sup>. En consecuencia la utilidad marginal del consumo es siempre positiva<sup>11</sup> y decreciente.
4. Riqueza inicial:  $A_0$ .
5. Flujo de ingresos laborales:  $Y_1, \dots, Y_T$ . Conocidos por el individuo al comienzo de su vida.
6. El individuo puede ahorrar o endeudarse a una tasa de interés determinada exógenamente, sujeto a la restricción que toda deuda debe pagarse al final de la vida.
7. Por simplicidad la tasa de interés se supone igual a cero.

#### Restricción presupuestaria:

Del supuesto 6 se obtiene la Restricción Presupuestaria (R.P.) que enfrenta el individuo:

$$(1) \quad \sum_{t=1}^T C_t = A_0 + \sum_{t=1}^T Y_t.$$

Nótese que se trata de una restricción *intertemporal*, es decir, como el individuo tiene acceso a crédito, puede haber períodos en que sus pasivos excedan sus activos; *no* es cierto que (1) se debe cumplir si sustituimos  $T$  por algún  $s$  menor que  $T$ .

### 2.2 Comportamiento

Como hemos supuesto que la utilidad marginal del consumo es siempre positiva, la R.P. se cumplirá con igualdad. El Lagrangiano del problema de maximización del individuo en consecuencia será:

$$(2) \quad L = \sum_{t=1}^T u(C_t) + \lambda \sum_{t=1}^T C_t.$$

Las variables respecto de las cuales optimiza el individuo son  $C_1, C_2, \dots, C_T$ . La condición de primer orden respecto de  $C_t$  es:

$$(3) \quad u'(C_t) = \lambda.$$

---

<sup>9</sup>Sección basada en el Capítulo 7 de *Advanced Macroeconomics* de David Romer, McGraw Hill, 1996.

<sup>10</sup>Frecuentemente haremos el supuesto adicional según el cual  $\lim_{C \rightarrow 0^+} u'(C) = +\infty$  y  $\lim_{C \rightarrow +\infty} u'(C) = 0$ . Estas condiciones, llamadas *de Inada*, tienen una justificación intuitiva razonable en varios contextos.

<sup>11</sup>En estas notas entenderemos un número “positivo” como un número estrictamente mayor que cero.

Como la función  $u(\cdot)$  es creciente y cóncava<sup>12</sup> tendremos que la condición anterior implica que  $C_1 = C_2 = \dots = C_T$ . Combinando este resultado con la R.P. concluimos que:

$$(4) \quad C_t = \frac{1}{T} \left( A_0 + \sum_{t=1}^T Y_t \right).$$

El término entre paréntesis al lado derecho de (4) son los recursos con que el individuo cuenta a lo largo de toda su vida.

### 2.3 Teoría del Ingreso Permanente

De (4) se tiene que el consumo corriente está determinado por la suma de todos los ingresos del individuo. En la terminología de Friedman (1957), la expresión del lado derecho de (4) es el *ingreso permanente* y la diferencia entre el ingreso corriente y permanente es, por definición, el *ingreso transitorio*. Luego el consumo está determinado (de hecho, por definición es igual a) el ingreso permanente.

Esta es una de las principales predicciones de la Teoría del Ingreso Permanente (TIP): el consumo depende de la riqueza humana del individuo (en el caso de (4) la suma de los ingresos laborales) y no del ingreso laboral corriente.

Aún cuando la trayectoria del ingreso no afecta el consumo, es fundamental al determinar el ahorro. El ahorro del individuo en el período  $t$  se define como:

$$S_t \equiv Y_t - C_t.$$

Usando (4) tenemos:

$$S_t = \left( Y_t - \frac{1}{T} \sum_{s=1}^T Y_s \right) - \frac{1}{T} A_0.$$

Luego el ahorro es alto cuando el ingreso, comparado con el ingreso promedio, es alto, es decir, cuando el ingreso transitorio es alto. De hecho, por definición, el ahorro es *igual* al ingreso transitorio. De manera análoga, cuando el ingreso corriente es inferior al ingreso permanente, el ahorro es negativo (el individuo se endeuda).

Del párrafo anterior se infiere que el individuo utiliza los ahorros y el endeudamiento para suavizar su trayectoria de consumo. Esta característica de buscar, dentro de sus posibilidades, *suavizar el consumo* (“consumption smoothing” en inglés) es común a todo modelo que adjudica al individuo un cierto grado de racionalidad. De hecho, también juega un rol central en la Teoría de Ciclo de Vida que vemos a continuación.

### 2.4 Teoría del Ciclo de Vida

Tanto la Teoría del Ciclo de Vida (TCV) como la Teoría del Ingreso Permanente se basan en el marco analítico descrito anteriormente. Fueron derivadas en paralelo, diferenciándose en cuestiones de énfasis. Así, por ejemplo, la TCV (Modigliani y Brumberg, 1954) enfatiza aspectos relacionados con el hecho que los individuos tienen incentivos para ahorrar mientras trabajan con objeto de mantener niveles de consumo adecuados cuando jubilan. Esta teoría estudia detenidamente las consecuencias que tiene el ciclo de vida sobre el ahorro agregado.

---

<sup>12</sup>Y además cumple las condiciones de Inada.



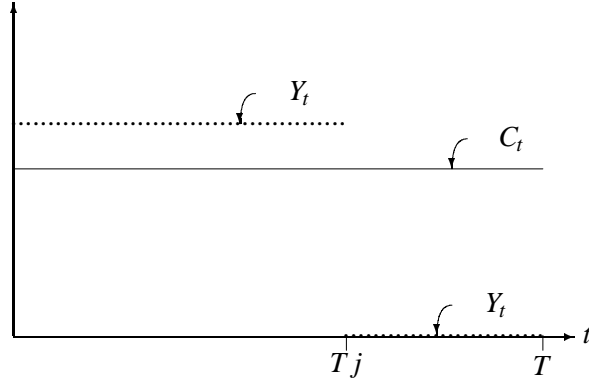


Figura 3: Ingreso y consumo a lo largo del ciclo de vida.

A los supuestos de la sección 2.2 agregamos que los individuos trabajan los primeros  $T_j$  períodos, percibiendo un ingreso laboral constante igual a  $Y$  en cada uno de estos períodos. Durante los últimos  $T - T_j$  períodos de sus vidas están jubilados, por lo cual no trabajan. Además suponemos que sus activos financieros iniciales son nulos ( $A_0 = 0$ ).

Entonces los resultados de la sección 2.2 permiten concluir que:

$$C_t = \frac{T_j}{T}Y,$$

donde  $T_j/T < 1$ . En consecuencia, el ahorro vendrá dado por:

$$S_t = \begin{cases} (1 - \frac{T_j}{T})Y, & t \leq T_j \\ -\frac{T_j}{T}Y, & t > T_j. \end{cases}$$

Finalmente, la riqueza financiera del individuo en el período  $t$  vendrá dada por:

$$A_t = \sum_{s=1}^t (Y_s - C_s).$$

Las Figuras 3 y 4 muestran como varían el consumo, el ahorro y los activos financieros a lo largo de la vida de los individuos. Lo más notable es que la trayectoria de los activos financieros tiene “forma de joroba” (*hump shaped* en inglés). Esta forma se ve en los datos, aunque la riqueza no cae tan rápido en la vejez.

A continuación vemos qué sucede con las variables agregadas correspondientes, bajo diversos escenarios. Las variables claves son la tasa a la cual crece la población (denotada por  $n$ ) y la tasa a la cual crecen los ingresos (denotada por  $g$ ).

Si  $n = g = 0$  tendremos que el ahorro promedio en un momento del tiempo será idénticamente nulo. En efecto, en cada momento del tiempo una fracción  $T_j/T$  de los individuos estará trabajando, ahorrando cada uno de ellos  $(1 - T_j/T)Y$ ; mientras que los restantes individuos están jubilados, desahorrando  $(T_j/T)Y$ .

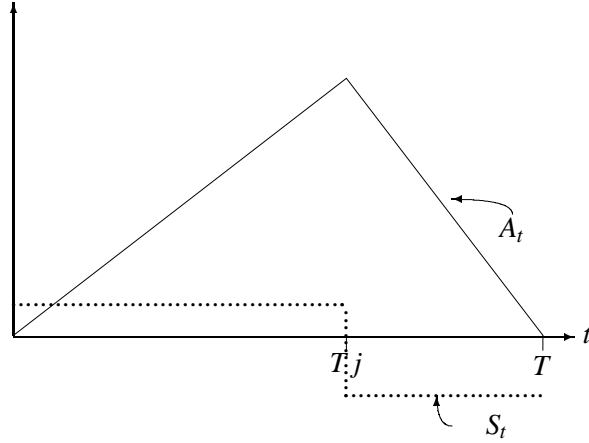


Figura 4: Ahorro y acumulación de activos a lo largo del ciclo de vida.

Sumando se obtiene un ahorro agregado,  $S_t^a$ , es igual a cero. Lo que sucede es que, como no hay crecimiento de la población ni del ingreso, los promedios temporales coinciden con los promedios transversales, por lo cual el ahorro agregado en un momento del tiempo es igual al ahorro promedio de un individuo durante su vida y este último, por motivos obvios, es cero.

La situación cambia si ya sea  $n$  o  $g$  (o ambos) son mayores que cero. Para fijar ideas, suponemos  $n > 0$  y  $g = 0$ . Un cálculo paciente pero sin mayores dificultades permite concluir que entonces el ahorro agregado, como fracción del ingreso agregado, vendrá dado por:

$$\frac{S_t^a}{Y_t^a} = 1 - \frac{T_J}{T} \left[ \frac{(1+n)^T - 1}{(1+n)^T - (1+n)^{T-T_J}} \right].$$

Luego el ahorro será positivo, debido a que la fracción de la población que trabaja y ahorra será mayor que en el caso  $n = g = 0$ . Un resultado similar se obtiene cuando  $g > 0$ .

## 2.5 Extensión: El Caso $r = \delta > 0$

El modelo anterior tiene varios supuestos que relajaremos en secciones posteriores: certidumbre, acceso a crédito, ausencia de activos riesgosos, etc. Sin embargo, aún para el caso simple que acabamos de considerar, hay algunos supuestos sobre los cuales conviene hacer algunos comentarios:

1. Se supone que existe un sólo bien en la economía.
2. Se supone que la utilidad del individuo es aditiva, es decir, que  $U(C_1, C_2, \dots, C_T)$  se puede descomponer en la suma de las utilidades de distintos períodos. Este supuesto es común a casi todos los modelos usados en macroeconomía, lo cual no quita que tiene un carácter restrictivo.
3. El modelo supone que al individuo no le importa el bienestar de sus descendientes. Hay una gran polémica entre los economistas respecto de cuán fuerte es la motivación para dejar herencias. En

todo caso, si al individuo le importan sus descendientes, entonces la restricción presupuestaria no se cumplirá con igualdad.

En esta sección nos concentramos en dos restricciones del modelo anterior que se introdujeron exclusivamente por motivos pedagógicos, cual es suponer que la tasa de interés es igual a cero y que el individuo no descuenta su utilidad futura.

**Supuestos y notación<sup>13</sup>:**

1. La función de utilidad del individuo es:  $U = \sum_{t=1}^T \gamma^t u(C_t)$ , donde  $\gamma \equiv 1/(1 + \delta)$  con  $\delta$  igual a la tasa de descuento subjetiva del individuo.
2. El consumo que se realiza durante el período  $t$ ,  $C_t$ , se cancela al final de dicho período.
3. La tasa de interés a la cual el individuo se puede endeudar o ahorra se denota mediante  $r$ . Es decir, ignoramos la brecha (en inglés “spread”) entre la tasa de captación y colocación y además suponemos que la tasa no varía en el tiempo.
4. La riqueza de que dispone el individuo al final del período  $t$  se denota mediante  $A_t$ . El interés que el individuo recibe durante el período  $t$  por sus activos (o los intereses que paga por su deuda) será igual a  $rA_{t-1}$ . El individuo recibe su ingreso laboral del período  $t$ ,  $Y_t$ , al final de este período.
5. Existen motivos, que se ven en Macroeconomía II, por los cuales en equilibrio general  $r$  debe ser cercano a la tasa subjetiva promedio de la población. Por suponer  $r = \delta$ , cuestión que haremos a continuación, es menos restrictivo de lo que pudiera parecer.

De las convenciones anteriores se infiere que:

$$(5) \quad A_t = (1 + r)A_{t-1} + Y_t - C_t.$$

Evaluando la expresión anterior en  $t = T$ , sustituyendo la misma expresión por  $A_{T-1}$ , luego por  $A_{T-2}$ , y así sucesivamente, se obtiene:

$$A_T = (1 + r)^T A_0 + (Y_T - C_T) + (1 + r)(Y_{T-1} - C_{T-1}) + \dots + (1 + r)^{T-1}(Y_1 - C_1).$$

Como  $A_T = 0$  (por los supuestos que hicimos respecto de la función de utilidad instantánea), dividiendo ambos lados de la expresión anterior por  $(1 + r)^T$  y reordenando términos lleva a la Restricción Presupuestaria:

$$(6) \quad \sum_{t=1}^T \gamma^t C_t = A_0 + \sum_{t=1}^T \gamma^t Y_t.$$

El lado derecho de la expresión anterior es el valor presente de la riqueza del individuo al momento de nacer, lo denotamos mediante  $W$ . Nótese que  $W$  consta de dos componentes: una es el valor presente del ingreso laboral (los economistas llaman a esta componente la “riqueza humana”) y la otra es lo que los economistas llaman “riqueza no humana” y que corresponde a activos financieros, la casa, el automóvil, etc.

---

<sup>13</sup>Varios de los supuestos que siguen son de timing, v.g., si se pagan los sueldos e intereses al comienzo o final del período, etc. Los resultados que siguen no dependen de estos supuestos, lo único importante es sentar alguna convención y proceder de manera acorde con ésta en las derivaciones.

Utilizando (5), el problema de optimización del individuo se puede plantear como elegir aquella secuencia de activos,  $A_1, A_2, \dots, A_T$ , que maximiza:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{t=1}^T \gamma^t u(C_t) \\ &= \sum_{t=1}^T \gamma^t u((1+r)A_{t-1} + Y_t - A_t). \end{aligned}$$

Planteando las condiciones de primer orden se concluye que, al igual que en el caso visto anteriormente<sup>14</sup>, el consumo será el mismo en todo período. Combinando este resultado con la R.P. se obtiene:

$$(7) \quad C_t = \frac{r}{1 - \gamma^T} W.$$

En consecuencia, si  $T$  es suficientemente grande ( $T = +\infty$ ) tendremos que  $C_t = rW$ , es decir, el individuo se comporta como si al comienzo de su vida comprara un bono perpetuo por el valor presente de toda su riqueza, consumiendo cada período el interés que paga este bono.

## 2.6 Aplicaciones

### 2.6.1 ¿Qué es el ahorro?

Una de las conclusiones que se siguen de la Teoría del Ciclo de Vida–Ingreso Permanente (TCV/IP) es que el ahorro no es un fin en sí mismo, sino que constituye la posibilidad de consumo futuro. Esta observación sugiere que varias afirmaciones que se hacen comunmente respecto del ahorro pueden ser incorrectas:

- Los pobres no tienen capacidad de ahorro. En la medida que los ingresos estén sobre los niveles de subsistencia, esta afirmación será falsa. En efecto, una persona de bajos ingresos también desea mantener al menos su nivel de consumo actual en el futuro, y como eventualmente sus ingresos laborales serán aun menores que los actuales tiene incentivos similares a aquellos de personas de más altos ingresos para ahorrar.
- El hecho que a la gente le importe su consumo relativo al de los demás lleva a las personas a consumir más. La inferencia anterior es equivocada. Si se desea mantener niveles de consumo similares a los de los demás y por eso se consume todo el ingreso corriente, será imposible lograr el objetivo en el futuro, ya que los niveles de consumo caerán casi inevitablemente.

### 2.6.2 Interpretando las ecuaciones de consumo empíricas

La ecuación de consumo Keynesiana tradicional postula que el consumo depende del ingreso disponible corriente. Esto ha llevado a estimar modelos de regresión lineal que relacionan el consumo (variable dependiente) con el ingreso disponible (variable independiente, que por simplicidad también denotaremos por  $Y$ ):

$$(8) \quad C_t = a + bY_t + e_t,$$

donde  $e_t$  denota el término de error de la regresión.

---

<sup>14</sup>Hacerlo como tarea.

Bajo la TCV/IP se tiene que el valor estimado de  $b$  viene dado por:

$$\begin{aligned}\hat{b} &= \frac{\text{Cov}(Y, C)}{\text{Var}(Y)} \\ &= \frac{\text{Cov}(Y^P + Y^T, Y^P)}{\text{Var}(Y^P + Y^T)} \\ &= \frac{\text{Var}(Y^P)}{\text{Var}(Y^P) + \text{Var}(Y^T)}\end{aligned}$$

donde al pasar a la última identidad hemos supuesto que las variaciones en los ingresos transitorios y permanentes no están correlacionadas. Luego la propensión marginal al consumo estimada en una función de consumo Keynesiana será mayor mientras menor sea la variación de la componente transitoria. Este resultado tiene varias consecuencias que se han encontrado en los datos:

1. Si se estima una función de consumo con datos transversales (varios individuos en un mismo año) se obtiene valores de  $\hat{b}$  mucho menores que uno. Esto se debe a que las fluctuaciones observadas en la relación consumo–ingreso reflejan factores que varían mucho de un individuo a otro, tales como desempleo y momento en el ciclo de vida.
2. Por contraste, al trabajar con datos de consumo agregado anuales (serie cronológica), las variaciones reflejarán más que nada las tasas de crecimiento de largo plazo, por lo cual la propensión marginal al consumo estimada será cercana a uno.
3. La disgresión del primer punto anterior también explica por qué al estimar ecuaciones de consumo Keynesianas con datos transversales para distintos grupos de individuos, la propensión marginal a consumir resulta menor para grupos con ingresos que fluctúan más (v.g. agricultores cuando éstos no tienen un subsidio estatal generoso que amortigua las fluctuaciones en sus ingresos).
4. Se deja como tarea extender la disgresión hecha para la pendiente de la recta de regresión a la intersección de esta recta con el eje  $y$  (el parámetro  $\hat{a}$ ).

### 2.6.3 Propensión marginal al consumo

Nótese que de la discusión de la subsección anterior *no* se infiere que la ecuación de consumo Keynesiana sea la manera apropiada de testear la TCV/IP. Por el contrario, existen formas directas de verificar la relevancia de la TCV/IP. Lo que se hizo en la discusión anterior fue interpretar los coeficientes de una ecuación de consumo Keynesiana desde el punto de vista de la TCV/IP.

A continuación determinaremos la propensión marginal al consumo que se infiere de la TCV/IP. La conclusión que obtendremos es que este concepto es de menor utilidad de lo que supone el modelo IS-LM.

1. Aumento no anticipado, permanente, del ingreso:
  - El ingreso aumenta de manera no anticipada en  $\Delta Y$  para todos los períodos futuros.
  - La TCV/IP implica que  $\Delta C = \Delta Y$  por lo cual la propensión marginal es 1.
2. Shock no anticipado de ingreso, transitorio:
  - $Y$  aumenta de manera no anticipada en  $\Delta Y$  durante un año. Luego retorna a los niveles anteriores.

- Entonces  $\Delta C \simeq r\Delta Y$ , por lo cual la propensión marginal es cercana a la tasa de interés.

### 3. Shock anticipado de ingreso, transitorio:

- En el período  $T_0$  los individuos se enteran que en  $T_1 > T_0$  tendrán un shock positivo de ingreso  $\Delta Y$  que no anticipaban.
- La TCV/IP predice que los individuos aumentarán su consumo a partir de  $T_0$ , con  $\Delta C \simeq r\gamma^{T_1-T_0}\Delta Y$ .
- De esta manera se tiene que el consumo aumenta en un período en que no varía el ingreso, por lo cual la propensión marginal en dicho período será infinita.

## 2.6.4 Gasto Fiscal Óptimo

La TCV/IP se puede aplicar para determinar cuál debiera ser el gasto fiscal. Los supuestos son los siguientes:

- $X = M = I = 0$ , donde  $X$ ,  $M$  e  $I$  denotan las exportaciones, las importaciones y la inversión privada.
- El gobierno puede ahorrar y endeudarse a la tasa internacional libre de riesgo,  $r^*$ .
- $Y$  denota el ingreso per cápita, el cual se supone seguía una trayectoria constante antes del shock.

La Figura 5 muestra la trayectoria del ingreso y consumo cuando no hay shock alguno. Como el gobierno desea suavizar el consumo, el gasto fiscal es igual al ingreso. La Figura 6 considera el caso de un shock positivo, no anticipado y permanente al ingreso fiscal. En este caso el gasto fiscal se ajusta junto con el ingreso y en un monto igual al tamaño del shock.

La Figura 7 muestra qué sucede luego de un shock positivo, no anticipado y transitorio al ingreso del gobierno. El gasto fiscal crece en menos que el shock, ya que se desea mantener el nuevo nivel de gasto indefinidamente. Además, mientras dura el shock de ingreso, el país acumula activos financieros en el extranjero de modo que, luego de que el ingreso retorna a su nivel anterior al shock, se gasta el interés que devengan los activos acumulados.

Finalmente, la Figura 8 considera el caso de un shock positivo, anticipado, permanente al ingreso. Podría tratarse, por ejemplo, del descubrimiento de pozos petroleros, los cuales comienzan a producir sólo tres años después de descubiertos<sup>15</sup>. De hecho, esta situación sucedió a comienzos de los noventa, luego del descubrimiento de pozos petroleros en las regiones de Cusiana y Cupiagua en Colombia. El gobierno colombiano incrementó su gasto siguiendo las prescripciones que sugiere suavizar el gasto fiscal<sup>16</sup>.

## 2.6.5 Impuestos óptimos vs. impuestos distorsionantes

Uno de los problemas principales de que se ocupa las Finanzas Públicas es cómo recaudar impuestos que combinen consideraciones de eficiencia económica (pocas distorsiones) con consideraciones de equidad. La TCV/IP tiene consecuencias interesantes para estudiar los posibles efectos distorsionantes que pueden tener diversos impuestos.

Para fijar ideas, suponemos que el gobierno desea recaudar un monto  $I$  de un individuo como aquel cuyo consumo queda determinado por (7). El ideal es cobrar un impuesto a suma alzada de monto igual a

<sup>15</sup>En estricto rigor, este shock de ingresos es transitorio, no permanente, ya que eventualmente el pozo se agota. Lo relevante del ejemplo es que es una situación real donde el shock antecede al aumento de los ingresos.

<sup>16</sup>Véase Armando Montenegro, Miguel Kiguel y Guillermo Calvo (editores), *Cusiana: Un reto de política económica*, Bogotá y Washington, D.C.: Departamento de Planeación y Banco Mundial, 1994.

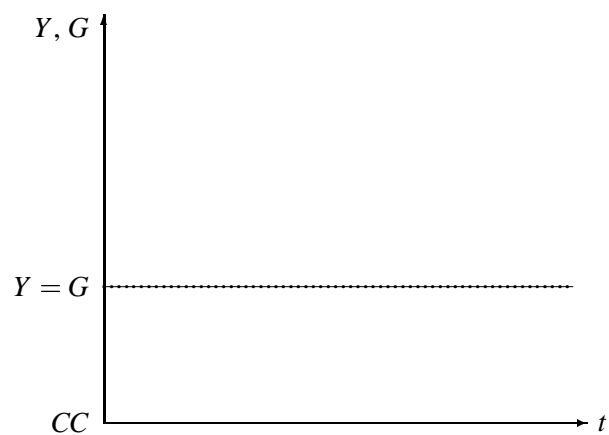


Figura 5: Situación inicial.

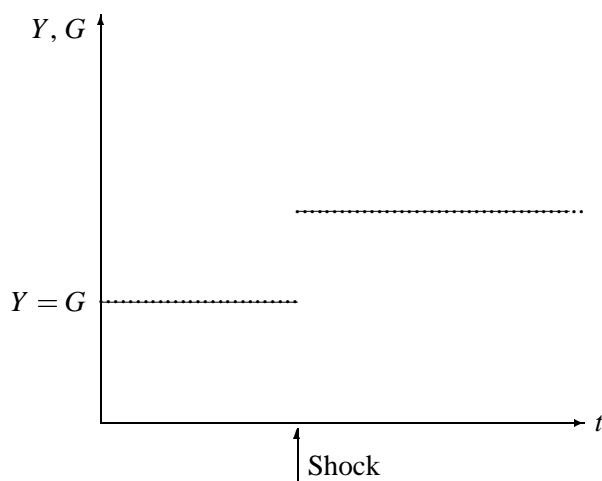


Figura 6: Efectos de un shock positivo, permanente y no anticipado del ingreso.

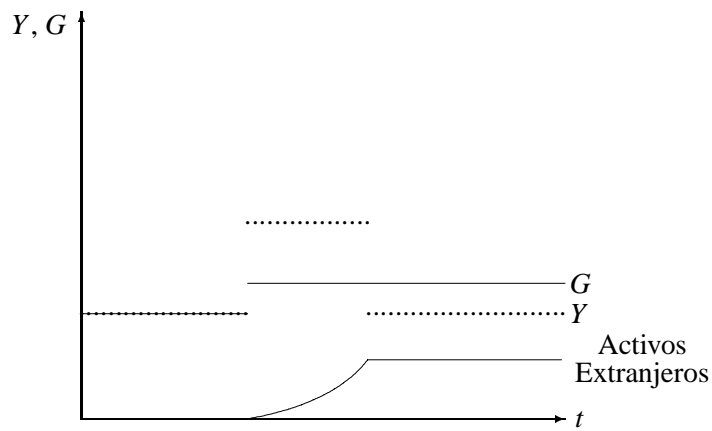


Figura 7: Efectos de un shock positivo, transitorio y no anticipado del ingreso.

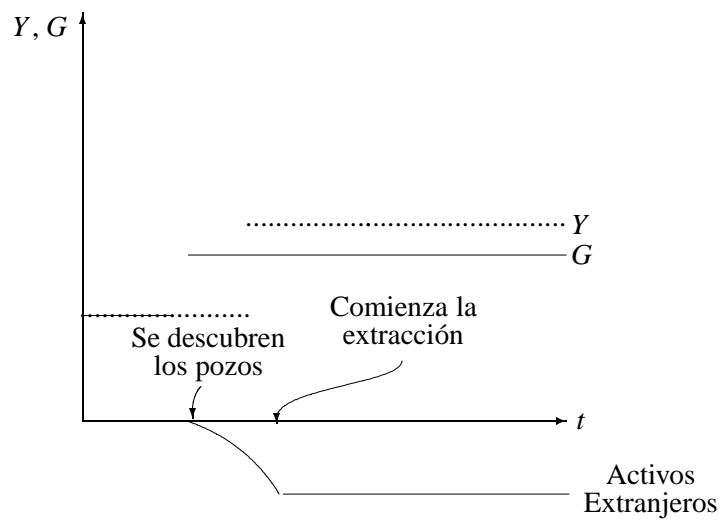


Figura 8: Efectos de un shock positivo, permanente y anticipado del ingreso.



$I$ . El individuo optimizará su bienestar con esta nueva restricción y su trayectoria de consumo será aquella descrita en (7), sustituyendo  $W - I$  en lugar de  $W$ .

Consideremos ahora el caso de un impuesto proporcional a las ganancias del capital,  $\tau$ , de modo que el individuo paga un impuesto igual a fracción  $\tau$  del ingreso por concepto de pagos de intereses. En lugar de (5) tendremos

$$(9) \quad A_t = [1 + r(1 - \tau)]A_{t-1} + Y_t - C_t,$$

lo cual llevará a la siguiente condición de optimalidad:

$$u'(C_t) = \frac{1 + r}{1 + r(1 - \tau)} u'(C_{t-1}).$$

Se sigue que la trayectoria de consumo óptima del individuo será decreciente:  $C_1 > C_2 > C_3 > \dots > C_T$ , de modo que este impuesto es distorsionante. Es decir, si se elige  $\tau$  de modo de recaudar  $I$  se tendrá que el individuo alcanzará una utilidad menor que si se recauda la misma suma con un impuesto a suma alzada. Al gravar el ahorro, un impuesto a las ganancias del capital promueve el consumo más de lo socialmente deseable, por lo cual los individuos ahorran menos de lo deseable.

Finalmente, consideramos un impuesto proporcional al consumo de tasa  $\tau$ . Se deja como ejercicio mostrar que el individuo elegirá una trayectoria de consumo constante. A diferencia del caso de un impuesto a las ganancias del capital, un impuesto al consumo no crea distorsiones. Esta es una de las razones por las cuales un impuesto al consumo es considerado una forma eficiente de financiar el gasto público.

### 3 Consumo, ahorro y la tasa de interés

Promover un crecimiento económico alto y sostenido es uno de los principales objetivos de la mayoría de los gobiernos. A mayor inversión, mayor será el crecimiento. Si a lo anterior agregamos que en una economía cerrada la inversión es igual al ahorro<sup>17</sup>, concluimos que comprender cuáles son los determinantes del ahorro es una pregunta central al momento de elegir políticas que promuevan un crecimiento sostenido.

Frecuentemente se argumenta que las tasas de interés artificialmente bajas que hubo en América Latina durante los años sesenta (en términos reales frecuentemente fueron negativas) explican las bajas tasas de ahorro de esa época. Esto plantea la pregunta de si realmente el ahorro crece con la tasa de interés. En esta sección estudiamos cómo variaciones en la tasa de interés afectan al consumo y al ahorro.

La intuición de “suavizamiento del consumo” fue la idea central de la subsección 2.5. Ese resultado depende del supuesto que la tasa de interés y la tasa de descuento subjetiva son iguales ( $r = \delta$ ). Como ya se mencionó, al estudiar crecimiento en el curso Macroeconomía II se verá que es razonable suponer que, en promedio,  $r = \delta$ <sup>18</sup>. Sin embargo, en el corto plazo la tasa de interés no tiene por qué ser igual a  $\delta$ ; más aún, basta mirar la página económica de un diario con cierta regularidad para concluir que la tasa de interés varía de manera no despreciable en el tiempo. Teniendo en cuenta lo anterior, en esta subsección relajamos el supuesto según el cual  $r = \delta$ , extendiendo el modelo de las secciones anteriores al caso con  $r \neq \delta$ .

Denotando  $\gamma = 1/(1 + \delta)$  y  $\beta = 1/(1 + r)$ , tenemos que el problema de maximización del individuo es el siguiente:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=1}^T \gamma^t u(C_t) \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{t=1}^T \beta^t C_t = A_0 + \sum_{t=1}^T \beta^t Y_t. \end{aligned}$$

Escribiendo el Lagrangiano correspondiente y maximizando respecto de  $C_1, \dots, C_T$  se obtiene:

$$(10) \quad \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} = \frac{1 + \delta}{1 + r}.$$

Es posible obtener una expresión más elegante si pasamos de tiempo discreto a tiempo continuo<sup>19</sup>. Suponiendo que el tiempo entre decisiones de consumo es  $\Delta t$ , la ecuación (10) equivale a:

$$\frac{u'(C(t + \Delta t))}{u'(C(t))} = \frac{1 + \delta \Delta t}{1 + r \Delta t}.$$

Tomando una aproximación de Taylor de primer orden para  $C(t + \Delta t)$ :

$$\frac{u'(C(t) + \Delta t \dot{C}(t))}{u'(C(t))} \simeq \frac{1 + \delta \Delta t}{1 + r \Delta t}.$$

<sup>17</sup>La evidencia empírica indica que la brecha entre ahorro e inversión es pequeña en la mayoría de los países, aún cuando no se trate de economías cerradas (este hecho estilizado —en inglés: *stylized fact*— se conoce como “puzzle de Horioka–Feldstein” y se estudia en detalle en Macroeconomía II). Luego el argumento que sigue vale en general.

<sup>18</sup>La idea es que la tasa de interés se ajusta de modo que en equilibrio es igual a la tasa subjetiva de descuento, es decir, el parámetro “profundo” es  $\delta$  y la variable que se ajusta es  $r$ .

<sup>19</sup>De modo que  $\int_s^t C(u) du$  denota el consumo del individuo en el período de tiempo  $[s, t]$ .

Tomando una aproximación de Taylor de primer orden para la expresión con  $u'$  en el numerador del lado izquierdo, realizando un poco de álgebra y tomando límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  se obtiene:

$$(11) \quad -\frac{\dot{C}(t)u''(C(t))}{u'(C(t))} = r - \delta.$$

Definimos:

$$(12) \quad \sigma(C) = -\frac{u'(C)}{Cu''(C)}.$$

Este término tiene las siguientes tres interpretaciones:

1. Es el inverso de la elasticidad de  $u'(C)$  respecto de  $C$ . Luego un valor grande de  $\sigma(C)$  significa que la utilidad marginal del consumo varía poco con el nivel de consumo.
2. La interpretación anterior tiene por consecuencia inmediata que para valores grandes de  $\sigma(C)$  el individuo “sufre” poco con fluctuaciones en su nivel de consumo (los incentivos para suavizar consumo son bajos). En cambio, valores pequeños de  $\sigma(C)$  llevan asociados fluctuaciones grandes de bienestar para cambios pequeños en el nivel de consumo.

Con objeto de formalizar la idea anterior, definimos la tasa de sustitución del consumo en  $s$  y  $t$  por analogía con la tasa de sustitución entre factores de producción:

$$\sigma(C(t), C(s)) = -\frac{\Delta\%[C(t)/C(s)]}{\Delta\%[u'(C(t))/u'(C(s))]}.$$

Tomando límite cuando  $s \rightarrow t$  en la expresión anterior obtenemos la tasa de sustitución intertemporal instantánea de consumo; con un poco de paciencia se muestra que ésta viene dada por  $\sigma(C(t))$ .

Visto desde este punto de vista,  $\sigma(C)$  mide la disposición del individuo a sustituir consumo intertemporalmente en respuesta a incentivos (e.g., cambios en la tasa de interés). Una elasticidad de sustitución intertemporal grande indica una gran disposición a aprovechar oportunidades y apartarse de suavizar el consumo cuando  $r$  difiere de  $\delta$ .

3. El inverso de  $\sigma(C)$  es igual al coeficiente de aversión relativa al riesgo. Nótese que en esta sección no hay riesgo, por lo cual esta interpretación no es relevante. Sin embargo, desde ya queda de manifiesto que al trabajar con utilidades aditivamente separables, no es posible distinguir entre el grado de aversión al riesgo de los individuos y su grado de sustitución intertemporal en el consumo, ya que se fuerza una relación inversa entre ambos.

Una familia de funciones de utilidad instantánea que se utiliza frecuentemente en macroeconomía es aquella con coeficiente de elasticidad de sustitución constante (se le conoce como CES por Constant Elasticity of Substitution o CIES por Constant Intertemporal Elasticity of Substitution), la cual viene dada por:

$$u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} & \theta > 0, \theta \neq 1; \\ \log(c) & \theta = 1. \end{cases}$$

Para esta familia de funciones de utilidad instantánea, se tiene que  $\sigma(C) = 1/\theta$  por lo cual la elasticidad no depende de  $C$ .

Volviendo a la ecuación (11) tenemos que equivale a:

$$\frac{\dot{C}}{C} = \sigma(C)(r - \delta).$$

Más aún, la derivación anterior se extiende fácilmente al caso en que la tasa de interés varía en el tiempo, en la medida que estas variaciones sean conocidas con anticipación (recordar que todavía estamos en la sección de certidumbre). Luego:

$$(13) \quad \frac{\dot{C}}{C} = \sigma(C)(r(t) - \delta).$$

La expresión anterior se conoce como **Regla de Keynes–Ramsey**. De ella se infiere que si  $r(t) > \delta$ , el consumo tenderá a crecer, mientras que si  $r(t) < \delta$ , la trayectoria de consumo será decreciente. Lo anterior ya lo sabíamos a partir de (10), lo nuevo es que la tasa a la cual cambia  $C$  es proporcional a  $\sigma(C)$ .

Vamos a lo que motivó esta sección: comprender la relación entre el ahorro y la tasa de interés. El hecho que un aumento en la tasa de interés lleve a una trayectoria de consumo más empinada *no* necesariamente implica que aumente el ahorro. En efecto, para fijar ideas consideramos el problema de dos períodos:  $T = 2$ . La única tasa de interés relevante es aquella del primer período,  $r$ , pues nadie ahorra durante el segundo período.

De la Regla de Keynes–Ramsey se infiere que un aumento de la tasa de interés (de  $r$  a  $r'$ ) lleva a una trayectoria de consumo más empinada:  $C_2/C_1$  será mayor. Lo que está detrás de esto es el efecto sustitución: el precio relativo del consumo en  $t = 1$  y  $t = 2$  es  $1/(1+r)^{20}$ ; mientras mayor es la tasa de interés es más barato consumir en  $t = 2$  relativo a consumir en  $t = 1$ . Sin embargo, también tenemos el efecto ingreso asociado al incremento en la tasa de interés:

1. Si antes del aumento de la tasa de interés el individuo ahorra en el primer período, el efecto ingreso será positivo. El individuo será más rico y gastará más en ambos períodos. Este efecto apunta en sentido contrario al efecto sustitución; el efecto neto (tanto sobre el consumo como sobre el ahorro) será ambiguo.
2. En cambio si el individuo era un deudor en el primer período, entonces una mayor tasa de interés lo hace más pobre. En tal caso tanto el efecto ingreso como el efecto sustitución lo llevan a consumir menos en el primer período, con el consiguiente aumento del ahorro.
3. Si en el primer período el consumo es igual al ingreso no hay efecto ingreso, por lo cual todos los cambios se deben exclusivamente al efecto sustitución. Luego cae el consumo en el primer período y aumenta el ahorro.

La Figura 9 ilustra lo que sucede cuando no hay efecto ingreso. Inicialmente el individuo planea consumir  $Y_1$  en el primer período y  $Y_2$  en el segundo período, de modo que no ahorra ni se endeuda. El aumento de la tasa de interés rota la restricción presupuestaria, en torno a la canasta de consumo, en el mismo sentido que las manecillas del reloj. Los puntos sobre la nueva restricción presupuestaria a la derecha de  $(Y_1, Y_2)$  no pueden ser óptimos, ya que estas canastas de consumo eran factibles bajo la tasa original y el individuo prefirió  $(Y_1, Y_2)$ , que también es factible con la tasa nueva. Se concluye que necesariamente la nueva canasta de consumo tendrá  $C_1 < Y_1$  y  $C_2 > Y_2$ , por lo cual un aumento de la tasa de interés conlleva un aumento del ahorro corriente.

---

<sup>20</sup>Esto se sigue directamente de la restricción presupuestaria intertemporal.

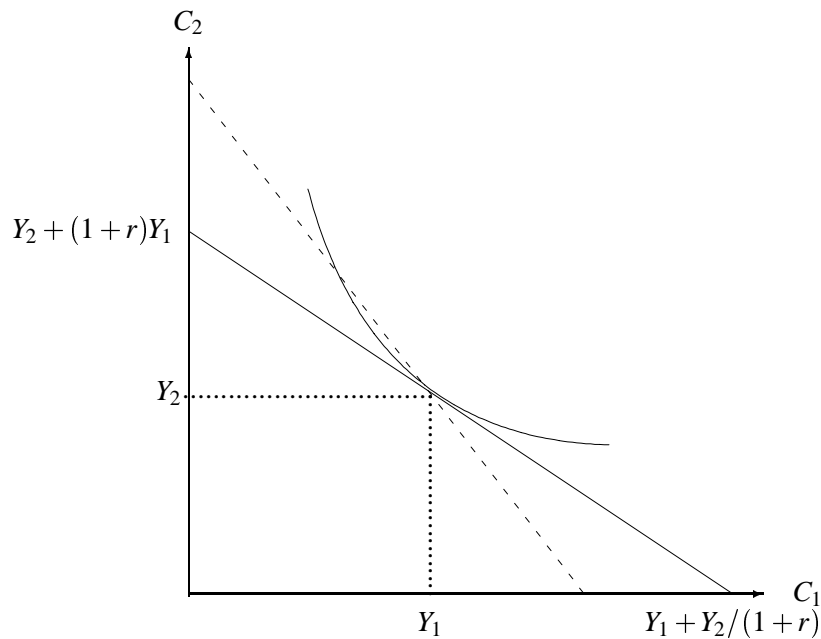


Figura 9: Efecto de un aumento de la tasa de interés cuando el individuo no se endeuda en el primer periodo.

La Figura 10 ilustra la situación cuando, antes del aumento de la tasa de interés, el individuo es ahorrante neto en el primer período. Para efectos conceptuales, conviene descomponer el cambio en la canasta de consumo en dos pasos consecutivos. Primero el individuo ajusta su consumo al cambio de precio relativo del consumo en ambos períodos. Un aumento de la tasa de interés hace relativamente más barato consumir en el segundo período. La restricción presupuestaria gira en torno al punto que determina la trayectoria de consumo óptima antes del aumento de la tasa de interés. De esta manera, con objeto de que esta primera etapa considere exclusivamente el efecto de sustitución, se impone artificialmente que la trayectoria de consumo original sigue estando sobre la recta de restricción presupuestaria.

La segunda etapa del ajuste consiste en trasladar paralelamente hacia afuera la restricción presupuestaria. Al no cambiar la pendiente de esta recta, no hay efecto sustitución y se logra aislar el efecto ingreso. Suponiendo que tanto el consumo en el primer como en el segundo período son bienes superiores, se tiene que este segundo efecto lleva a un aumento del consumo en ambos períodos<sup>21</sup>. El efecto combinado sobre el consumo del primer período será ambiguo. El efecto sustitución aumenta el ahorro corriente mientras que el efecto ingreso lo reduce.

En una economía cerrada en promedio los individuos son ahorrantes, pues los activos de la economía son positivos. En este caso lo más relevante es el caso 1, por lo cual el efecto de la tasa de interés sobre el ahorro será ambiguo.

En cambio, en una economía en desarrollo con acceso a capitales extranjeros y endeudada, la situación relevante será el caso 2, por lo cual un incremento en la tasa de interés llevará a más ahorro. Nótese, sin

<sup>21</sup>Recordemos que un bien es *superior* si un aumento en el ingreso lleva a un aumento en la demanda por este bien. En el caso de una función de utilidad aditivamente separable, el consumo en cada período es un bien superior.

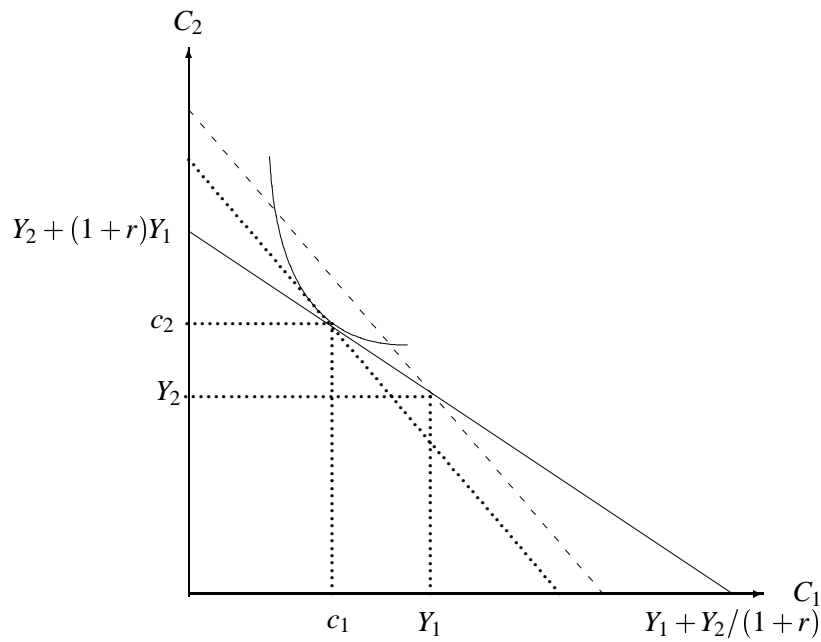


Figura 10: Efecto de un aumento de la tasa de interés cuando el individuo es ahorrante neto.

embargo, que el mayor ahorro se debe a que la deuda aumenta, por lo cual hay que ahorrar más para poder pagar esa deuda, esto tiene poco que ver con la intuición de por qué fue malo tener una tasa de interés artificialmente baja en los años sesenta.

Respecto de la evidencia empírica sobre la relación entre el ahorro y la tasa de interés, la conclusión de Deaton (1992, p. 61) habla por sí sola:

*[...] saving is not much influenced by interest rates. Given the theoretical ambiguities, I do not find it surprising that clear results have not emerged from the analysis of the data, nor that different results can be obtained by looking at different data sets in different circumstances.*

## 4 Incertidumbre: Equivalencia cierta

El supuesto central de esta sección es que la función de utilidad instantánea,  $u(C)$ , es cuadrática, es decir:

$$u(C) = C - \frac{a}{2}C^2,$$

con  $a > 0$ .

El principal motivo por el cual esta función de utilidad es popular es que simplifica notablemente los cálculos en el caso con incertidumbre<sup>22</sup>. En efecto, con una utilidad instantánea cuadrática, el concepto central de toda teoría de consumo (la utilidad marginal del consumo) es lineal en la variable que se desea estudiar (el consumo). Sin embargo, esta función de utilidad no es atractiva desde un punto de vista económico:

- El consumo óptimo en algunos períodos puede ser negativo.
- La utilidad marginal puede ser negativa.
- La aversión absoluta al riesgo crece con el ingreso, es decir, los individuos están dispuestos a pagar más por evitar situaciones inciertas a medida que crece su riqueza.

Inicialmente supondremos que  $r = \delta = 0$ , aunque este supuesto será relajado más adelante. El problema que resuelve el consumidor en  $t = 1$  es:

$$(14) \quad \max_{C_1} E_1[U] = E_1 \left[ \sum_{t=1}^T C_t - \frac{a}{2} C_t^2 \right]$$

$$(15) \quad \text{s.a.} \quad \sum_{t=1}^T C_t \leq A_0 + \sum_{t=1}^T Y_t,$$

donde  $E_1$  denota el valor esperado condicional en la información disponible en  $t = 1$ . Los restantes supuestos son aquellos de la Sección 2.

A continuación derivamos informalmente la condición de primer orden para el problema recién planteado<sup>23</sup>. Para ello notamos que si  $C_1$  es óptimo, entonces, si reducimos  $C_1$  en  $dC$  podremos aumentar el consumo en algún instante futuro  $t$  en  $dC$  (acá estamos usando  $r = 0$ ), con un cambio de utilidad esperada dado por:

$$E_1[\Delta U] = [1 - aC_1] dC - E_1[1 - aC_t] dC = -a[C_1 - E_1[C_t]] dC.$$

Si  $C_1 < E_1[C_t]$ , entonces para  $dC > 0$  se tendrá  $\Delta E_1[U] > 0$ , contradiciendo nuestro supuesto que  $C_1$  era óptimo. Lo mismo sucede si  $C_1 > E_1[C_t]$ , esta vez tomando  $dC < 0$ . Luego se debe cumplir la siguiente condición de primer orden:

$$(16) \quad C_1 = E_1[C_t]; \quad t = 2, 3, \dots$$

De (15) (con igualdad pues seguimos suponiendo que no hay motivos para dejar herencias), se tiene:

$$(17) \quad \sum_{t=1}^T E_1[C_t] = A_0 + \sum_{t=1}^T E_1[Y_t].$$

<sup>22</sup>El problema de programación dinámica estocástica resultante es el bien conocido y estudiado problema lineal-cuadrático.

<sup>23</sup>La derivación formal, en un contexto mucho más general, viene en la próxima sección.

De (16) y (17) se obtiene:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{T} \left( A_0 + \sum_{t=1}^T E_1[Y_t] \right) \\ &= \frac{1}{T} E_1[\text{Riqueza Total}] \\ &\equiv Y_1^P, \end{aligned}$$

donde  $Y_1^P$  se define como el ingreso permanente.

Si comparamos la expresión anterior con su contraparte para el caso sin incertidumbre, tenemos que esta última se obtiene de la primera sustituyendo las variables aleatorias por sus valores esperados. Este es el célebre resultado de *equivalencia cierta*.

De (16) se tiene que  $(C_t)_{t=1,2,\dots,T}$  es una martingala, ya que:

$$(18) \quad E_{t-1}[C_t] = C_{t-1}.$$

De hecho, definiendo  $e_t \equiv C_t - C_{t-1}$ , tomando  $E_{t-1}$  a ambos lados de la definición y usando (18) se concluye que  $E_{t-1}[e_t] = 0$ . Es decir, las variaciones de consumo de un período a otro,  $C_t - C_{t-1}$  son impredecibles, ya que su mejor predictor en  $t-1$ ,  $E_{t-1}[C_t - C_{t-1}]$ , es idénticamente nulo. Este es el célebre Resultado del Camino Aleatorio de Robert Hall (1978).

La expresión (18) equivale a:

$$(19) \quad E_t[e_{t+1}] = 0.$$

Los tests de (19) se conocen como "tests de la Ecuación de Euler". La idea de testear modelos económicos viendo si se cumplen las condiciones de primer orden (y no el modelo directamente) fue uno de los grandes avances en macroeconometría en la década de los '80. El pionero en este tipo de trabajo econométrico fue Lars Hansen, de la Universidad de Chicago.

A continuación mostramos que:

$$(20) \quad \Delta C_2 \equiv C_2 - C_1 = \frac{1}{T-1} \left( \sum_{t=2}^T E_2[Y_t] - \sum_{t=2}^T E_1[Y_t] \right),$$

por lo cual la variación de consumo es igual a la variación en los valores esperados de los ingresos presentes y futuros.

En efecto:

$$(21) \quad C_1 = \frac{1}{T} \left( A_0 + \sum_{t=1}^T E_1[Y_t] \right),$$

$$(22) \quad C_2 = \frac{1}{T-1} \left( A_1 + \sum_{t=2}^T E_2[Y_t] \right).$$

Y como  $A_1 = A_0 + Y_1 - C_1$ :

$$(23) \quad C_2 = \frac{1}{T-1} \left( A_0 + Y_1 - C_1 + \sum_{t=2}^T E_2[Y_t] \right)$$



$$(24) \quad = \frac{1}{T-1} \left( A_0 + Y_1 - C_1 + \sum_{t=2}^T \{E_2[Y_t] - E_1[Y_t]\} + \sum_{t=2}^T E_1[Y_t] \right).$$

Notando que  $E_1[Y_1] = Y_1$ , tenemos que (21) equivale a

$$A_0 + Y_1 + \sum_{t=2}^T E_1[Y_t] = TC_1.$$

Sustituyendo esta expresión en (24) resulta:

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{T-1} \left( TC_1 - C_1 + \sum_{t=2}^T \{E_2[Y_t] - E_1[Y_t]\} \right) \\ &= C_1 + \frac{1}{T-1} \left( \sum_{t=2}^T E_2[Y_t] - \sum_{t=2}^T E_1[Y_t] \right), \end{aligned}$$

completando la derivación de (20). ■

Los resultados vistos en esta sección son parte de las Teorías del Ciclo de Vida y del Ingreso Permanente (TCV/IP), ya que la intuición principal sigue siendo la de suavizamiento del consumo. De hecho, con equivalencia cierta lo que se suaviza es el valor esperado del consumo.

### Test empíricos

Para testear la hipótesis de camino aleatorio de Hall, se puede estimar una regresión de  $\Delta C \equiv C_t - C_{t-1}$  contra variables conocidas en  $t-1$ . Si esta hipótesis es válida, dichas variables *no* debieran tener poder explicativo, es decir, los coeficientes de dichas regresiones no debieran ser significativamente diferentes de cero.

En su paper clásico de 1978, Hall consideró entre los posibles regresores conocidos en  $t-1$  al consumo de dicho período, el ingreso y el valor del índice accionario Dow Jones. Sólo este último resultó tener capacidad predictiva de los cambios de consumo, violando la hipótesis de camino aleatorio.

Campbell y Mankiw (1989) suponen que una fracción  $\lambda$  del ingreso agregado es de individuos que se consumen todo su ingreso (en inglés dichos individuos son descritos como ‘hand-to-mouth’, pues todo el dinero que reciben es utilizado de inmediato para consumir). El ingreso de estos individuos es  $Y_{1,t}$ . De modo que  $Y_{1,t} = \lambda Y_t$  y  $C_{1,t} = Y_{1,t}$ , por lo cual:

$$(25) \quad \Delta C_{1,t} = \Delta Y_{1,t} = \lambda \Delta Y_t.$$

La fracción restante  $1 - \lambda$  de individuos, cuyo ingreso total denotamos mediante  $Y_{2,t}$ , consume de acuerdo a la hipótesis del camino aleatorio:

$$(26) \quad \Delta C_{2,t} = e_{2,t},$$

donde  $E_{t-1}[e_{2,t}] = 0$ .

De (25) y (26) se sigue que:

$$(27) \quad \Delta C_t = \Delta C_{1,t} + \Delta C_{2,t} = \lambda \Delta Y_t + e_{2,t}.$$

En la expresión anterior se tendrá que  $e_{2,t}$  y  $\Delta Y$  tienen correlación positiva, pues un ingreso mayor corriente frecuentemente tiene una componente importante no anticipada. Luego se requiere utilizar variables instru-

mentales para estimar (27), es decir, variables estacionarias correlacionadas con  $\Delta Y$  e independientes de  $e_{it}$ . Las candidatas obvios son  $\Delta C_{t-1}, \Delta C_{t-2}, \dots$ , ya que por el Resultado de Camino Aleatorio éstas son independientes de innovaciones en el consumo. Éstas son los instrumentos que fueron utilizadas por Campbell y Mankiw. El valor estimado de  $\lambda$  para datos de los Estados Unidos fue de aproximadamente 0.5. Luego aproximadamente la mitad de los individuos se comporta como sugiere la TCV/IP. La otra mitad son más cercanos a consumidores keynesianos tradicionales.

#### 4.1 El caso $r = \delta > 0$

Trabajamos con las siguientes definiciones, las cuales difieren de aquellas consideradas anteriormente:

- $A_t$ : activos financieros de que dispone el individuo al comienzo del período  $t$ .
- $Y_t$ : ingreso laboral del individuo en  $t$ , conocido y recibido al comienzo de  $t$ .

Al comienzo de  $t$  el individuo percibe su ingreso y decide cuánto consumir y cuánto ahorrar. Los activos financieros que deposita ese período serán iguales a  $A_t + Y_t - C_t$ , recibiendo éstos una tasa de interés constante  $r$ . Luego, los activos financieros evolucionan de acuerdo a:

$$(28) \quad A_{t+1} = (1+r)(A_t + Y_t - C_t).$$

En  $t = 0$  el individuo ahora maximiza:

$$E_0 \left[ \sum_{t=0}^{T-1} \gamma^t u(C_t) \right]$$

sujeto a la restricción presupuestaria intertemporal (28).

Supongamos que  $C_0$  es el consumo óptimo en  $t = 0$ . Entonces, si dicho consumo se perturba en  $dC$ , se tendrá que en  $t$  se podrá incrementar el consumo en  $(1+r)^t dC$ . El cambio de utilidad correspondiente será:

$$\Delta U = -u'(C_0)dC + \gamma E_0[u'(C_t)](1+r)^t dC.$$

Y como  $\delta = r$  tendremos que  $\gamma(1+r)^t = 1$ , por lo cual, notando que la utilidad marginal es lineal en el consumo, concluimos que la condición de primer orden nuevamente es:

$$(29) \quad C_0 = E_0[C_t].$$

Es decir, nuevamente se elige el consumo en  $t = 0$  de modo de suavizar el consumo esperado.

De (28) y  $A_T = 0$  se tiene que:

$$\begin{aligned} A_1 &= (1+r)A_0 + (1+r)(Y_0 - C_0), \\ A_2 &= (1+r)A_1 + (1+r)(Y_1 - C_1) \\ &= (1+r)^2 A_0 + (1+r)^2(Y_0 - C_0) + (1+r)(Y_1 - C_1) \\ &\vdots \\ A_T &= (1+r)^T A_0 + \sum_{t=0}^{T-1} (1+r)^{T-t}(Y_t - C_t). \end{aligned}$$

Y como  $A_T = 0$  (recordar que el individuo muere en  $t = T$ ) se tendrá que:

$$(30) \quad \sum_{t=0}^{T-1} (1+r)^{-t} C_t = \sum_{t=0}^{T-1} (1+r)^{-t} Y_t + A_0.$$

Esta es la Restricción Presupuestaria Efectiva (o Realizada).

En  $t = 0$  no conocemos  $Y_t$  para  $t \geq 1$ , por lo cual (30) no sirve para determinar  $C_0$ . Por ese motivo tomamos  $E_0$  a ambos lados de (30), obteniendo la Restricción Presupuestaria Esperada:

$$\sum_{t=0}^{T-1} (1+r)^{-t} E_0[C_t] = \sum_{t=0}^{T-1} (1+r)^{-t} E_0[Y_t] + A_0.$$

Usando (29) y tomando  $T \rightarrow \infty$  se obtiene:

$$(31) \quad C_0 = \frac{r}{1+r} \left\{ E_0 \left[ \sum_{t \geq 0} (1+r)^{-t} Y_t \right] + A_0 \right\}.$$

Nuevamente la solución exhibe la propiedad de equivalencia cierta. Es “como si” el ingreso esperado fuese el ingreso en un problema sin incertidumbre.

En general:

$$(32) \quad C_t = \frac{r}{1+r} A_t + \frac{r}{1+r} \sum_{s \geq 0} \gamma^s E_t[Y_{t+s}].$$

Sustituyendo (28) en la expresión anterior se obtiene:

$$(33) \quad C_t = r(A_{t-1} + Y_{t-1} - C_{t-1}) + \frac{r}{1+r} \sum_{s \geq 0} \gamma^s E_t[Y_{t+s}].$$

Además, de (32) se tiene que

$$C_{t-1} = \frac{r}{1+r} A_{t-1} + \frac{r}{1+r} \sum_{s \geq 0} \gamma^s E_{t-1}[Y_{t-1+s}],$$

por lo cual:

$$\begin{aligned} (1+r)C_{t-1} &= rA_{t-1} + r \sum_{s \geq 0} \gamma^s E_{t-1}[Y_{t-1+s}] \\ &= rA_{t-1} + rY_{t-1} + r \sum_{s \geq 1} \gamma^s E_{t-1}[Y_{t+s-1}] \\ &= rA_{t-1} + rY_{t-1} + \frac{r}{1+r} \sum_{u \geq 0} \gamma^u E_{t-1}[Y_{t+u}]. \end{aligned}$$

Restando esta última expresión de (33):

$$(34) \quad \Delta C_t = \frac{r}{1+r} \sum_{u \geq 0} \gamma^u \{ E_t[Y_{t+u}] - E_{t-1}[Y_{t+u}] \}.$$

Luego, bajo equivalencia cierta, el cambio en el consumo es igual a aproximadamente el cambio en el interés que devenga el valor presente esperado del ingreso laboral futuro.

Definimos el Ingreso Permanente en  $t$  como aquel ingreso,  $Y_{p,t}$ , que si se obtuviera en todos los períodos a partir de  $t$  daría origen a un valor presente igual al valor presente esperado de la riqueza en  $t$ :

$$\sum_{s \geq 0} \beta^s Y_{p,t} = \sum_{s \geq 0} \beta^s E_t[Y_{t+s}] + A_t.$$

Luego:

$$Y_{p,t} = \frac{r}{1+r} \left\{ \sum_{s \geq 0} E_t[Y_{t+s}] + A_t \right\} = C_t.$$

Para obtener expresiones más útiles para  $C_t$  consideramos procesos estocásticos particulares para el ingreso laboral  $Y_t$ . En primer lugar tenemos que si los  $Y_t$  son i.i.d. con media  $\mu$ , de modo que

$$Y_t = \mu + e_t,$$

con los  $e_t$  i.i.d. con media nula.

Entonces, de (34):

$$\Delta C_t = \frac{r}{1+r} e_t,$$

por lo cual:

$$\frac{\partial \Delta C_t}{\partial e_t} = \frac{r}{1+r} \ll 1.$$

Esta elasticidad es muy pequeña por la naturaleza transitoria de los shocks no anticipados del ingreso ( $e_t$ ).

Consideramos ahora el caso en que  $Y$  sigue un proceso autoregresivo de primer orden:

$$Y_t - \mu = \psi(Y_{t-1} - \mu) + e_t,$$

donde  $\psi \in [0, 1]$  es la autocorrelación de primer orden y los  $e_t$  son i.i.d. normales con media nula<sup>24</sup>.

Entonces tendremos que para  $i \geq 0$ :

$$E_t[Y_{t+i} - \mu] = \psi^i (Y_t - \mu),$$

por lo cual

$$E_t[Y_{t+i}] = \mu + \psi^i (Y_t - \mu).$$

Luego, de (34):

$$\begin{aligned} \Delta C_t &= \frac{r}{1+r} \sum_{u \geq 0} \gamma^u \{ \psi^u (Y_t - \mu) - \psi^{u+1} (Y_{t-1} - \mu) \} \\ &= \frac{r}{1+r} \sum_{u \geq 0} \gamma^u \psi^u e_t \\ &= \frac{r}{1+r-\psi} e_t, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos que  $r = \delta$ .

---

<sup>24</sup>El caso anterior corresponde a  $\psi = 0$ .

Luego:

$$\frac{\partial \Delta C_t}{\partial e_t} = \frac{r}{1+r-\psi},$$

que varía entre  $r/(1+r)$  y 1 a medida que  $\psi$  va de 0 a 1. Mientras más persistentes son las innovaciones al ingreso, mayor es la respuesta del consumo a dichas innovaciones. De hecho, cuando  $\psi = 1$  (camino aleatorio) el consumo responde uno-a-uno a los shocks de ingreso.

La intuición tras el resultado anterior es la siguiente: La innovación del ingreso en  $t$  contribuirá, en valor esperado,  $\psi^i e_t$  al ingreso en  $t+i$ . Como el individuo además descuenta el futuro a tasa  $\beta = 1/(1+r)$ , en plata de hoy la suma anterior es  $\beta^i \psi^i e_t$ . Luego, utilizando equivalencia cierta, mi consumo en  $t$  responderá a  $e_t$  de acuerdo a:

$$\Delta C_t = \frac{r}{1+r} \sum_{i \geq 0} \beta^i \psi^i e_t = \frac{r}{1+r-\psi} e_t.$$

### Evidencia empírica

Vimos que con equivalencia cierta:

$$C_t = \frac{r}{1+r} \left\{ E_t \left[ \sum_{s \geq 0} (1+r)^{-s} Y_{t+s} \right] + A_t \right\} = \frac{r}{1+r} E_t[\text{Riqueza}].$$

Para ver si la evidencia es favorable a la TCV/IP o a las ecuaciones de consumo keynesianas tradicionales, queremos determinar si  $C_t$  responde a la riqueza o del ingreso corriente. El problema es que estas dos variables explicativas están altamente correlacionadas. Por ejemplo, si un trabajador es promovido en el trabajo, aumentan tanto su ingreso corriente como sus ingresos esperados futuros (y luego su riqueza esperada).

Una de las principales limitaciones de la economía como disciplina científica es que no se pueden realizar experimentos controlados<sup>25</sup>. Si esto fuera posible haríamos lo siguiente. Tomaríamos un grupo grande de individuos y los dividiríamos, al azar, en dos subgrupos. A los miembros del primer grupo, les daríamos un aumento en su ingreso corriente, el cual no llevaría asociado incrementos futuros. En cambio, a los miembros del segundo grupo les daríamos un incremento en sus ingresos corrientes acompañado de incrementos futuros. Luego veríamos los patrones de consumo de todos los individuos y podríamos determinar cuál de las teorías explica mejor el comportamiento observado.

Ante la imposibilidad de realizar experimentos controlados como el anterior, la economía se contenta con analizar *experimentos naturales*, es decir, situaciones en que variaciones exógenas de ciertos determinantes del comportamiento de interés permiten distinguir entre dos (o más) teorías económicas. En nuestro caso, queremos situaciones en que *naturalmente* el ingreso corriente y la riqueza no se mueven en la misma dirección. A continuación vemos dos de ellos.

### Caso 1: Jubilación

Cuando un individuo jubila, su ingreso cae notablemente mientras que su riqueza no varía de manera importante. Venti y Wise (1993, mimeo, Harvard) muestran que la composición de la riqueza de individuos mayores es la siguiente:

<sup>25</sup>Existe una subdisciplina de la economía, de desarrollo reciente, conocida como *Economía Experimental*, en que se realizan experiencias “controladas”. Sin embargo, éstas son en condiciones que no necesariamente reflejan las situaciones de toma de decisiones reales de los individuos.

RIQUEZA PROMEDIO EDAD 65-69 (EN US\$)

VPN[Pensión Seguridad Social]	100.000
VPN[Pensión que da el empleador]	62.000
VPN[Activos Personales para Jubilación]	11.000
Otros Activos Financieros	42.000
Casa	65.000
Otros Activos	34.000
<b>TOTAL</b>	<b>314.000.</b>

La cifra es importante (el ingreso per cápita en EE.UU. en 1991 fue de US\$16.000), pareciendo indicar un comportamiento acorde con la TCV/IP. Sin embargo, el 83% del ahorro es forzado. Además el cuadro anterior muestra valores promedio: datos individuales indican que la mayoría (más de la mitad) de las familias tiene ahorros inferiores a US\$10.000.

## Caso 2: Reducción Anticipada de Impuestos

En los Estados Unidos, a comienzos de 1981, la administración del presidente Reagan anunció una reducción de impuestos de acuerdo al siguiente calendario:

- Reducción de 5% en 1981
- Reducción adicional de 10% en 1982
- Reducción adicional de 8% en 1983.

De acuerdo a la TCV/IP, el anuncio debiera haber llevado a un incremento del consumo, aún durante los meses que transcurrieron desde el anuncio hasta la primera reducción de impuestos. James Poterba de MIT (AER, Mayo 1988) utiliza datos mensuales de consumo para concluir que *no* hubo un aumento significativo del consumo al momento que se hizo el anuncio. Una posible explicación es que los hogares no creyeron que el Congreso aprobaría las reducciones.

## 5 Activos riesgosos

En las secciones anteriores el individuo podía ahorrar sólo en un activo libre de riesgo (v.g., cuenta de ahorro o bono de gobierno). En la práctica, sin embargo, existen una gran variedad de activos en que se puede invertir, muchos de ellos riesgosos y con retornos promedios más altos que los activos libres de riesgo.

En esta sección consideramos dos fuentes de incertidumbre. Primero, al igual que en secciones anteriores, el ingreso futuro es incierto. Segundo, y aquí está la novedad respecto de secciones anteriores, en cada período el individuo enfrenta una decisión de portafolio con sus ahorros: ¿Cuánto ahorrar en el activo libre de riesgo y cuánto en el activo riesgoso? Denotamos la fracción que ahorra en el activo libre de riesgo por  $\omega_t$ . Suponemos, por simplicidad, que existe sólo un activo riesgoso, cuyo retorno neto (estocástico) en el período  $t$  viene dado por la variable aleatoria  $z_t^{26}$ . De esta manera, el individuo debe tomar dos decisiones en cada período: Cuánto consumir y qué fracción de sus ahorros invertir en el activo libre de riesgo.

Existen dos trabajos fundamentales sobre este tema: Samuelson (1969) y Merton (1969). Seguiremos al primero de ellos<sup>27</sup>. En  $t = 0$  el individuo resuelve:

$$(35) \quad \max_{C_0, \omega_0} E_0 \left[ \sum_{t=0}^{T-1} \gamma^t u(C_t) \right],$$

sujeto a la restricción presupuestaria

$$(36) \quad A_{t+1} = (A_t + Y_t - C_t) [\omega_t(1 + r_t) + (1 - \omega_t)(1 + z_t)].$$

Al igual que en la sección anterior,  $A_t$  denota la riqueza financiera al comienzo de  $t$ , mientras que  $Y_t$  denota el ingreso laboral en  $t$ , el cual se conoce (y recibe) al comienzo de dicho período.

El consumidor elige  $C_0$  sabiendo que en  $t = 1$  elegirá  $C_1$ , en  $t = 2$   $C_2$ , etc. Denotando mediante  $V_t(A_t)$  el valor presente esperado de la utilidad del individuo como función de sus activos financieros en  $t$ <sup>28</sup>, tenemos que el problema anterior se puede escribir como uno de programación dinámica estocástica:

$$V_t(A_t) = \max_{C_t, \omega_t} E_t \left[ \sum_{s=t}^{T-1} \gamma^{s-t} u(C_s) \right].$$

Es intuitivamente obvio (y se puede demostrar formalmente) que el problema anterior equivale a:

$$V_t(A_t) = \max_{C_t, \omega_t} \{u(C_t) + \gamma E_t[V_{t+1}(A_{t+1})]\},$$

formulación particularmente útil para obtener soluciones numéricas, conocida como *ecuación de recurrencia* o *ecuación de Bellman*.

### Condiciones de Primer Orden

Sustituyendo la restricción presupuestaria por  $A_{t+1}$  en el lado derecho de la Ecuación de Bellman, obtenemos:

$$(37) \quad V_t(A_t) = \max_{C_t, \omega_t} \{u(C_t) + \gamma E_t[V_{t+1}((A_t + Y_t - C_t)[\omega_t(1 + r_t) + (1 - \omega_t)(1 + z_t)])]\}.$$

<sup>26</sup>Todo lo que sigue se extiende fácilmente al caso de más de un activo riesgoso.

<sup>27</sup>Véase también Blanchard y Fischer, pp. 279-288.

<sup>28</sup>El subíndice  $t$  resume el hecho que  $V_t$  depende de la distribución del vector aleatorio  $(Y_{t+1}, Y_{t+2}, \dots, z_t, z_{t+1})$ .

Diferenciando el lado derecho de la expresión anterior respecto de  $G$  y  $\omega_t$ , respectivamente:

$$(38) \quad u'(C_t) = \gamma E_t[\{\omega_t(1+r_t) + (1-\omega_t)(1+z_t)\}V'_{t+1}(A_{t+1})],$$

$$(39) \quad E_t[V'_{t+1}(A_{t+1})(r_t - z_t)] = 0.$$

Por el Teorema de la Envolvente (Principio del Máximo) se puede diferenciar ambos lados de (37) respecto de  $A_t$  sin tomar en cuenta que  $C_t$  y  $\omega_t$  dependen de  $A_t$ , obteniendo:

$$(40) \quad V'(A_t) = \gamma E_t[\{\omega_t(1+r_t) + (1-\omega_t)(1+z_t)\}V'_{t+1}(A_{t+1})]$$

$$(41) \quad = u'(C_t),$$

donde en la última igualdad usamos (38).

Utilizando (40) para eliminar  $V'_{t+1}(A_{t+1})$  en (38) y (39) obtenemos:

$$(42) \quad u'(C_t) = \gamma E_t[\{\omega_t(1+r_t) + (1-\omega_t)(1+z_t)\}u'(C_{t+1})],$$

$$(43) \quad E_t[u'(C_{t+1})(1+r_t)] = E_t[u'(C_{t+1})(1+z_t)].$$

Finalmente, sustituyendo (43) en (42):

$$(44) \quad u'(C_t) = \gamma(1+r_t)E_t[u'(C_{t+1})],$$

$$(45) \quad u'(C_t) = \gamma E_t[(1+z_t)u'(C_{t+1})].$$

Las expresiones anteriores se pueden derivar informalmente perturbando una trayectoria óptima de manera análoga a como se hizo en la sección de equivalencia cierta. Por ejemplo, en el caso de (44), si a lo largo de la trayectoria óptima se perturba  $C_t$  a  $C_t - \Delta C$  (con  $\Delta C$  pequeño) y el monto ahorrado en  $t$ ,  $\Delta C$ , se invierte en el activo fijo, esto reportará ingreso adicional de  $(1+r_t)\Delta C$  en  $t+1$ , pudiendo incrementarse el consumo en dicho período en ese monto. Como los niveles de consumo originales eran los óptimos, esta perturbación no puede aumentar la función objetivo del individuo, por lo cual:

$$\Delta V_t(A_t) \simeq \{-u'(C_t) + \gamma(1+r_t)E_t[u'(C_{t+1})]\} \Delta C = 0,$$

de donde

$$u'(C_t) = \gamma(1+r_t)E_t[u'(C_{t+1})].$$

La condición de primer orden (45) se deriva análogamente, invirtiendo el monto ahorrado en el activo riesgoso.

También es interesante notar que si suponemos que  $r_t \equiv r = \delta$ , de modo que  $\gamma(1+r_t) = 1$ , tendremos que (44) implica que la utilidad marginal del consumo sigue una martingala<sup>29</sup>, generalizando así el resultado de Camino Aleatorio de Hall.

En general, el problema anterior no tiene soluciones explícitas, debiendo usarse métodos numéricos (iteraciones con la Ecuación de Bellman) para obtener los niveles de consumo/ahorro óptimos. Hay dos excepciones importantes a lo anterior. La primera es cuando la función de utilidad instantánea es cuadrática y no hay activo riesgoso, recuperándose el caso de equivalencia cierta visto anteriormente. El segundo caso

<sup>29</sup>El proceso  $F_t, t = 1, 2, \dots$  sigue una martingala si  $E_t[F_{t+1}] = F_t$ , es decir, si la mejor predicción de valores futuros es el valor presente. El concepto de martingala es la generalización natural del camino aleatorio.



es cuando el ingreso laboral es perfectamente diversificable.

### Ingreso laboral diversificable

Aún cuando no existen mercados donde se puede diversificar el riesgo asociado al capital humano, se pueden comprar activos correlacionados negativamente con dicho ingreso, de modo que el supuesto central es menos arbitrario de lo que parece en un comienzo.

Habiendo supuesto que el riesgo asociado a los ingresos laborales es diversificable, sin pérdida de generalidad se puede asumir que  $Y_t \equiv 0$ . Para simplificar, tomamos  $r_t \equiv r$ ,  $z_t$  i.i.d. y  $T = +\infty$ . Se tiene que entonces  $V_t(A_t)$  no depende de  $t$ , por lo cual se puede denotar  $V(A_t)$ .

Es posible mostrar que existe una solución (y ésta es única) del problema anterior cuando  $u$  pertenece a la familia HARA (que incluye las funciones CES, exponencial y cuadrática). A continuación consideramos el caso particular en que  $u(C) = \log(C)$  y postulamos una solución del tipo:

$$(46) \quad V(A_t) = a \log(A_t) + b,$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes a determinar. Al suponer que la forma funcional anterior no depende de  $t$ , estamos usando el supuesto  $T = +\infty$ . Si mostramos que existen  $a$  y  $b$  tales que (46) satisface la Ecuación de Bellman, habremos resuelto el problema<sup>30</sup>. Sustituyendo (46) en la Ecuación de Bellman:

$$(47) \quad V_t(A_t) = \max_{C_t} \{ \log(C_t) + \gamma E_t[a \log(A_{t+1}) + b] \}$$

Y como

$$A_{t+1} = (A_t - C_t) \{ (1+r)\omega_t + (1+z_t)(1-\omega_t) \},$$

tenemos que (47) equivale a:

$$V_t(A_t) = \max_{C_t} \{ \log(C_t) + \gamma E_t[a \log(A_t - C_t) + b'] \}.$$

La CPO correspondiente será:

$$\frac{1}{C_t} = a\gamma \frac{1}{A_t - C_t},$$

por lo cual

$$(48) \quad C_t = \frac{1}{1+a\gamma} A_t.$$

Sustituyendo (48) en (47) se tiene que

$$a \log(A_t) + b = \log A_t + \gamma a \log A_t + b'',$$

por lo cual  $a = 1 + a\gamma$ , de donde  $a = 1/(1-\gamma)$ . Luego:

$$(49) \quad C_t = \frac{1}{1+a\gamma} A_t = \frac{\delta}{1+\delta} A_t.$$

Concluimos que la decisión de consumo/ahorro sólo depende de la tasa subjetiva de descuento,  $\delta$ , y no de variables financieras. Cambios futuros en ingresos (dividendos) sólo afectan el consumo vía la riqueza.

---

<sup>30</sup>Donde asumimos que se ha demostrado previamente la existencia y unicidad de una solución.

## 6 Ahorro por precaución

Bajo equivalencia cierta se tiene que un incremento en la incertidumbre de los ingresos (manteniendo el valor esperado constante) no altera la regla de consumo/ahorro óptimo. Esto contradice la intuición de la gran mayoría de las personas, según la cual una de las principales motivaciones para ahorrar es contar con un “colchón de seguridad” (en inglés *buffer stock*) ante la eventualidad de escenarios adversos. Luego esperaríamos que un incremento de la incertidumbre respecto del ingreso futuro lleve a un mayor ahorro corriente.

La motivación anterior para ahorrar se conoce como *ahorro por motivos de precaución* o simplemente *ahorro por precaución* (en inglés: *precautionary saving*). Para capturar este fenómeno, debemos considerar funciones de utilidad instantánea que no sean cuadráticas. De hecho, el resultado principal de esta sección es que habrá ahorro por precaución si y sólo si  $u''' > 0$ , es decir, si y sólo si la utilidad marginal es convexa.

### 6.1 Presentación Informal

Suponemos  $r = \delta = 0$  y utilizamos dos resultados fundamentales de cursos del análisis de decisiones bajo incertidumbre (ver curso de microeconomía):

#### A. Desigualdad de Jensen

$$\left. \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f : \text{estrictamente convexa} \\ X : \text{v.a. con } \text{Var}(X) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow E[f(X)] > f(E[X]).$$

#### B. Mean-preserving spread y $E[f(X)]$

$$\left. \begin{array}{l} Y : \text{v.a. simétrica c/r a 0} \\ Y : \text{independiente de } X \\ Z = X + Y (\text{Mean Preserving Spread}) \end{array} \right\} \Rightarrow E[f(Z)] > E[f(X)].$$

A continuación damos la derivación informal del resultado central de esta sección. Suponemos  $r = \delta = 0$ . También suponemos que la media y varianza de  $C_{t+1}$  (condicional en  $t$ ) vienen dadas exógenamente<sup>31</sup>. El ejercicio que hacemos es ver qué sucede si la incertidumbre respecto de  $C_{t+1}$  aumenta preservando su valor esperado (‘mean-preserving spread’), es decir:

$$\begin{aligned} E_t[C_{t+1}^{\text{post}}] - E_t[C_{t+1}^{\text{pre}}] &= 0, \\ \text{Var}_t[C_{t+1}^{\text{post}}] - \text{Var}_t[C_{t+1}^{\text{pre}}] &> 0. \end{aligned}$$

En tal caso, de la Condición de Optimalidad:

$$u'(C_t) = E_t[u'(C_{t+1})]$$

tenemos que si  $u'$  es convexa ( $u''' > 0$ ):

$$u'(C_t^{\text{post}}) = E_t[u'(C_{t+1}^{\text{post}})] \quad \text{por la C.P.O.}$$

<sup>31</sup>Este es el supuesto que justifica describir la derivación que sigue como informal, ya que la distribución de  $C_{t+1}$  depende de la distribución de los ingresos futuros, por lo cuál es endógena.

$$\begin{aligned}
&> E_t[uC_{t+1}^{\text{pre}}] && \text{por la Propiedad B} \\
&> u'(E_t[C_{t+1}^{\text{pre}}]) && \text{por la Propiedad A.,}
\end{aligned}$$

de modo que:

$$C_t^{\text{post}} < E_t[C_{t+1}^{\text{pre}}].$$

En cambio, es fácil ver que en el caso de equivalencia cierta se tiene:

$$C_t^{\text{E.C.,post}} = E_t[C_{t+1}^{\text{E.C.,pre}}].$$

Como hemos supuesto que los lados derechos de las dos expresiones anteriores vienen dados exógenamente (y son iguales), hemos demostrado que el ahorro por precaución,  $\$^{\text{prec}}$ , definido como  $C_t^{\text{E.C.,post}} - C_t^{\text{E.C.,pre}}$ , es estrictamente positivo cuando  $u''' > 0$ .

Un desarrollo análogo al anterior muestra que el ahorro por precaución es negativo cuando  $u''' < 0$ . No hay motivo teórico para suponer a priori que  $u'''$  deba tener un signo determinado, (a diferencia de  $u'' < 0$ , que sí se puede derivar de axiomas elementales). Luego si  $u''' > 0$  o  $u''' < 0$  es una cuestión empírica. El problema está en que no se puede medir  $u'''$  directamente. Lo que se puede hacer es ver si los datos son consistentes con predicciones que se derivan de suponer ahorro por precaución; sin embargo, frecuentemente es difícil distinguir entre las predicciones del ahorro por precaución y predicciones de teorías alternativas (v.g., restricciones de liquidez).

Algunos autores razonan a la inversa, argumentando que lo intuitivo del concepto de ahorro por precaución justifica suponer  $u''' > 0$ . Este es uno de los motivos por los cuales la función de utilidad instantánea CES es tan popular en trabajos empíricos<sup>32</sup>.

## 6.2 Presentación formal: Dos períodos

Suponemos que el individuo vive 2 períodos y que  $r = \delta = 0$ . Suponemos que con la información disponible en  $t = 1$ , el ingreso total de ambos períodos viene dado por  $Y \equiv Y_1 + Y_2$ , con

$$Y = \begin{cases} \bar{Y} + \sigma & \text{con probabilidad } \frac{1}{2} \\ \bar{Y} - \sigma & \text{con probabilidad } \frac{1}{2} \end{cases}$$

Luego

$$\begin{aligned}
(50) \quad u'(C_1) &= E_1[u'(C_2)] \\
&= E_1[u'(Y - C_1)] \\
&= \frac{1}{2}u'(\bar{Y} + \sigma - C_1) + \frac{1}{2}u'(\bar{Y} - \sigma - C_1).
\end{aligned}$$

La ecuación (50) define (implícitamente)  $C_1$  como función de  $\sigma$ . Diferenciando ambos lados de esta expresión con respecto de  $\sigma$  (es decir, aplicando el Teorema de la Función Implícita) obtenemos:

$$u''(C_1) \frac{dC_1}{d\sigma} = \frac{1}{2}u''(\bar{Y} + \sigma - C_1) \left(1 - \frac{dC_1}{d\sigma}\right) + \frac{1}{2}u''(\bar{Y} - \sigma - C_1) \left(-1 - \frac{dC_1}{d\sigma}\right).$$

---

<sup>32</sup>Cabe notar que para una función de utilidad instantánea CES,  $u''' > 0$ .

De donde

$$\frac{dC_1}{d\sigma} = \frac{u''(\bar{Y} + \sigma - C_1) - u''(\bar{Y} - \sigma - C_1)}{2\{u''(C_1) + E_1[u''(C_2)]\}}.$$

Y tomando un Desarrollo de Taylor de ambas expresiones en el numerador en torno a  $\bar{Y} - C_1$ :

$$\frac{dC_1}{d\sigma} = \frac{\sigma u'''(\bar{Y} - C_1)}{u''(C_1) + E_1[u''(C_2)]}.$$

Luego:

$$\frac{dS_1}{d\sigma} = \frac{-\sigma u'''(\bar{Y} - C_1)}{u''(C_1) + E_1[u''(C_2)]},$$

y como el denominador es  $< 0$  (pues  $u'' < 0$ ), se tiene

$$\text{signo}\left(\frac{dS_1}{d\sigma}\right) = \text{signo}(u'''). \quad \blacksquare$$

### 6.3 Presentación formal: Función de utilidad exponencial

A diferencia del caso de equivalencia cierta, cuando  $u''' \neq 0$  en general no hay fórmulas cerradas para  $C_t$ , por lo cual se debe recurrir a métodos numéricos para calcular el consumo y ahorro óptimos. La única excepción conocida es el caso de una función de utilidad instantánea con coeficiente de aversión absoluta al riesgo constante:

$$u(C) = -e^{-\alpha C},$$

donde  $\alpha > 0$  denota la aversión absoluta al riesgo, la cual en este caso es constante. Notar que lo anterior significa que la aversión relativa al riesgo *crece* con el ingreso, por lo cual esta función de utilidad es sólo marginalmente más interesante que la cuadrática.

Suponemos que el ingreso sigue un camino aleatorio:

$$Y_t = Y_{t-1} + e_t,$$

con los  $e_t$  i.i.d. normales, con media nula y varianza  $\sigma^2$ . Además suponemos  $r = \delta = 0$  y que el individuo vive  $T$  períodos.

Un cálculo paciente, a partir de las condiciones de optimalidad y la restricción presupuestaria intertemporal, permite concluir que:

$$C_t = \frac{A_t}{T+1-t} + Y_t - \frac{\alpha(T-t)\sigma^2}{4}.$$

En cambio, bajo equivalencia cierta tenemos:

$$C_t = \frac{A_t}{T+1-t} + Y_t.$$

En consecuencia, el ahorro por precaución viene dado por:

$$S_t^{\text{prec}} = \frac{\alpha(T-t)\sigma^2}{4}.$$

Luego el ahorro por precaución es creciente en el coeficiente de aversión absoluta al riesgo ( $\alpha$ ) y en la varianza de las innovaciones del ingreso ( $\sigma^2$ ), y decreciente en el tiempo de vida que le queda al individuo ( $T - t$ ), todo lo cual es consistente con nuestra intuición.

#### 6.4 Una aproximación útil

En trabajos aplicados en que se desea incorporar el ahorro por precaución es habitual utilizar la función de utilidad instantánea CES:

$$u(C) = \frac{C^{1-\rho}}{1-\rho},$$

con  $\rho > 0$  y  $\rho \neq 1$ <sup>33</sup>.

La Condición de Optimalidad será:

$$(51) \quad C_t^{-\rho} = \frac{1+r}{1+\delta} E_t[C_{t+1}^{-\rho}],$$

de donde, tomando  $(\delta - r)/(1 + r) \simeq \delta - r$

$$(52) \quad \delta - r \simeq E_t \left[ \left( \frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\rho} - 1 \right].$$

Haciendo un desarrollo de Taylor de  $f(x) = x^{-\rho}$  en torno a  $x = 1$  se tiene:

$$x^{-\rho} \simeq 1 - \rho(x - 1) + \frac{1}{2}\rho(\rho + 1)(x - 1)^2.$$

Sustituyendo  $(C_{t+1}/C_t)^{-\rho}$  en (52) por la expresión que se obtiene de la aproximación anterior:

$$\delta - r \simeq -\rho E_t \left[ \frac{C_{t+1}}{C_t} - 1 \right] + \frac{1}{2}\rho(1 + \rho) E_t \left[ \left( \frac{C_{t+1}}{C_t} - 1 \right)^2 \right].$$

Finalmente, notando que

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} - 1 = \frac{C_{t+1} - C_t}{C_t} \simeq \Delta \log C_{t+1},$$

y que, en general,

$$E_t[(\Delta \log C_{t+1})^2] \gg |E_t[\Delta \log C_{t+1}]|,$$

la expresión anterior lleva a:

$$(53) \quad E_t[\Delta \log C_{t+1}] \simeq \frac{r - \delta}{\rho} + \frac{1}{2}(1 + \rho) \text{Var}_t[\Delta \log C_{t+1}].$$

Esta expresión muestra que la pendiente esperada de la trayectoria del consumo óptimo es creciente en la varianza de dicho consumo. Aún cuando tanto el valor esperado el lado izquierdo de la expresión anterior como la varianza del lado derecho son endógenos, esta expresión deja en claro que la trayectoria de consumo óptimo tiene una componente adicional positiva, debida al ahorro por precaución, la cual es proporcional a

<sup>33</sup>Además se toma  $u(C) = \log(C)$  correspondiendo (por continuidad) al caso  $\rho = 1$ .

$(1 + \rho)$ , conocido como coeficiente de prudencia<sup>34</sup>.

## 6.5 Evidencia empírica

Carroll (1992, Brookings Papers on Economic Activity) combina ahorro por precaución (utilidad instantánea CES) con el supuesto de impaciencia ( $\delta > r$ ) para explicar el hecho que el consumo sigue de cerca al ingreso en los hogares de los Estados Unidos.

- $\delta > r$  implica que la trayectoria esperada de consumo cae en el tiempo.
- Ahorro por precaución justifica tener un *colchón de ahorros*, en inglés: ‘buffer-stock’.

Carroll supone que existe una probabilidad  $p$  de quedar cesante en cada período, de modo que el ahorro por precaución es relevante. El proceso de ingresos lo estima a partir de los datos para los hogares estadounidenses.

Carroll muestra numéricamente que:

- El ahorro por precaución lleva a que los hogares tengan un colchón de ahorros.
- La impaciencia lleva a que los individuos no ahorren más que el colchón antes mencionado.

Luego el consumo seguirá de cerca al ingreso, difiriendo ambos de manera significativa sólo luego de períodos en que los hogares se gastaron parte importante del colchón de ahorros, ya que en estos períodos querrán volver a ahorrar. En inglés a los individuos a la Carroll se les llama ‘buffer-stock savers’.

Un elemento importante tras los resultados de Carroll es que cuando  $u$  es CES, se puede tener  $u'(0) = \infty$ , en cuyo caso los hogares acumulan activos de modo de asegurarse que en todo momento su consumo sea positivo. Esto lleva a que las familias nunca se endeuden [Zeldes (1989, QJE), Skinner (1988, JME) y especialmente Carroll (1992, BPEA)].

Para probar formalmente la afirmación del párrafo anterior se procede por inducción en reversa:

- Como existe una probabilidad estrictamente positiva que el ingreso en el último período de vida sea idénticamente cero (recordar que el individuo puede quedar cesante) los activos que el individuo tendrá al comienzo de dicho período,  $A_T$ , serán estrictamente positivos.
- Por inducción, lo mismo vale para períodos anteriores.
- Luego  $A_t > 0$ , en todo período  $t$ .

---

<sup>34</sup>En el caso de una función de utilidad instantánea cualquiera, dicho coeficiente se define como  $-cu'''(c)/u''(c)$ .

## 7 Restricciones de liquidez

Otro tema en que se ha investigado mucho en años recientes es aquel del impacto de las restricciones de liquidez sobre el consumo.

En uno de los problemas de la Guía de Consumo se ve que, en el caso  $T = 2$ , se tiene que al agregar restricciones de liquidez el ahorro en el primer período crece. También, que para valores del ingreso en ciertos rangos, incorporar restricciones de liquidez lleva a que el consumo siga de cerca al ingreso.

En el caso dinámico ( $T > 2$ ) las restricciones de liquidez llevan a consumir menos, aún en períodos en que éstas no son activas: la posibilidad que sean activas en el futuro lleva a consumir menos en el presente.

La TCV/IP descarta la posibilidad de restricciones de liquidez al suponer que los individuos se pueden endeudara tasa  $r$ .

El modelo que veremos a continuación se basa en Deaton (1991, *Econometrica*) “Savings and Liquidity Constraints”. Los principales supuestos de este modelo son los siguientes:

- $u(C)$ : CES (ahorro por precaución).
- $r < \delta$  (consumidores impacientes).
- No hay acceso a crédito:  $A_t \geq 0$ .
- No hay activos riesgosos.
- Los hogares pueden ahorrar a tasa libre de riesgo  $r$ .

Como el individuo no tiene acceso a crédito es intuitivamente obvio (y se puede mostrar formalmente) que el consumo óptimo en  $t$ ,  $C_t$ , será función del dinero de que dispone el individuo (en inglés: ‘cash-on-hand’) al comienzo de ese período, denotado por  $X_t$ . Tenemos que:

$$X_t = A_t + Y_t,$$

donde  $A_t$  denota los activos financieros disponibles al comienzo del período  $t$  y  $Y_t$  el ingreso de dicho período, el cual es recibido por los hogares al comienzo del período. Debido a la restricción de liquidez tenemos:

$$C_t \leq X_t.$$

Como consecuencia de la desigualdad anterior se tendrá que

$$(54) \quad u'(C_t) \geq u'(X_t).$$

Si la restricción de liquidez no es activa, la desigualdad anterior será estricta.

Se puede mostrar que la Condición de Optimalidad es:

$$u'(C_t) = \max \left\{ u'(X_t), \frac{1+r}{1+\delta} E_t[u'(C_{t+1})] \right\}.$$

A continuación, describimos la regla de consumo óptimo para diversos procesos estocásticos describiendo  $Y$ :

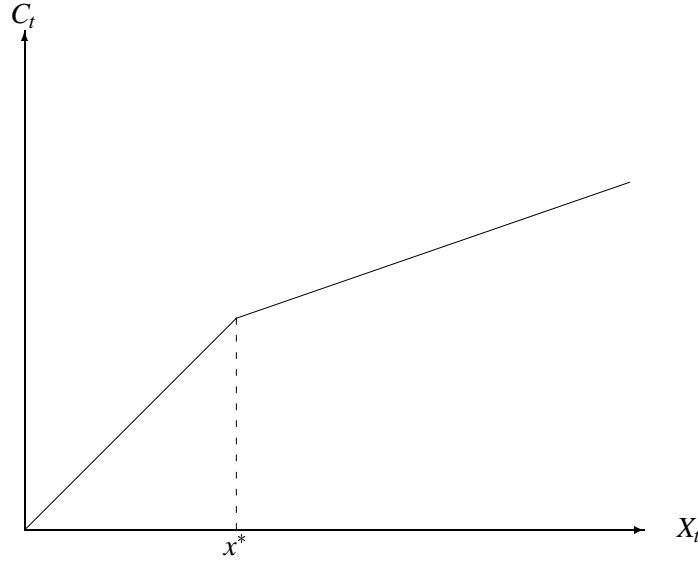


Figura 11: Consumo óptimo cuando  $Y$  sigue un ruido blanco.

### $Y_t$ sigue un ruido blanco

Deaton muestra formalmente que en este caso la regla de consumo óptima satisface las siguientes propiedades (ver la Figura 11):

- Si  $X_t \leq x^*$ , entonces se consume todo el dinero disponible. La pendiente de la regla óptima es uno en esta región.
- Para  $X_t > x^*$ , la tasa marginal de consumo (y ahorro) converge a un valor constante a medida que crece  $X_t$ <sup>35</sup>.
- El parámetro  $x^* = x^*(\rho, \mu_Y, \sigma_Y, \delta, r)$  es decreciente en el coeficiente de aversión relativa al riesgo,  $\rho$ , en  $\sigma_Y$  y en  $r$ , y creciente en  $\mu_Y$  y  $\delta$ .

El supuesto de impaciencia lleva a los individuos a consumir, contrarestando los variados incentivos que tiene para ahorrar (ahorro por precaución, restricción de liquidez).

También es interesante notar que la pendiente asintótica de la regla óptima para  $X > x^*$  será función de  $\rho, \sigma_Y, \delta$  y  $r$ , siendo creciente en  $\delta$  y decreciente en los restantes argumentos.

### $Y_t$ sigue un proceso autoregresivo de primer orden

En este caso:

$$Y_t - \mu_Y = \psi(Y_{t-1} - \mu_Y) + e_t,$$

con los  $e_t$  i.i.d. normales con media nula y varianza  $\sigma^2$ .

<sup>35</sup>En la figura no se dibujó curvatura alguna en esta región, pero la regla verdadera no es tan simple.



Entonces el consumo óptimo en  $t$ ,  $C_t$ , además de depender de  $X_t$ , también depende de  $e_t$ . Para cada valor de  $e_t$  hay una regla óptima como la de la Figura 11. Los valores de  $x^*$  son comunes a todas estas figuras; en cambio, la pendiente en la parte en que  $X_t > x^*$  es creciente en  $e_t$ , tomando siempre valores positivos, menores que uno.

### **$Y_t$ sigue un camino aleatorio**

En este caso:

$$Y_t = Y_{t-1} + e_t,$$

donde los  $e_t$  son i.i.d. normales con media nula y varianza  $\sigma^2$ .

Se puede mostrar numéricamente que en este caso, si el individuo parte sin activos, entonces nunca tiene incentivos para ahorrar. Como los shocks son totalmente permanentes, los hogares se ajustan de inmediato y por completo al cambio de ingresos. La impaciencia de los individuos puede más que el incentivo para ahorrar por precaución, por lo cual nunca hay ahorro.

### **Distinguiendo entre ahorro por precaución y restricciones de liquidez**

Al ir a los datos, puede ser imposible distinguir entre las predicciones de ahorro por precaución y restricciones de liquidez. En efecto, como se vio anteriormente, ahorro por precaución puede llevar a que los hogares *elijan*  $A_t > 0$  en todo período, lo cual es imposible de distinguir de situaciones en que las instituciones financieras *imponen* dicha restricción a los hogares.

## 8 Más allá de teorías racionales

En las secciones anteriores hemos supuesto un grado de racionalidad bastante exigente por parte de los hogares. Después de todo, son pocos los hogares que toman sus decisiones de consumo luego de resolver un problema de programación dinámica estocástica. ¿Tiene sentido suponer tanta racionalidad? ¿Por qué el énfasis en economía en comportamiento optimizante?

Sin pretender profundizar aquí sobre estos temas más bien filosóficos, esbozaremos diversas respuestas que se han dado a la inquietud anterior:

1. El énfasis en comportamiento optimizante en teoría macroeconómica fue, en parte, una reacción a las ecuaciones de consumo un tanto mecánicas del modelo IS-LM. En el proceso emergieron resultados interesantes, que fueron validados (al menos parcialmente) por la evidencia, como por ejemplo que el consumo depende de la riqueza de los individuos, más que del ingreso, o que la propensión marginal a consumir depende del grado de transitoriedad/permanencia del shock de ingresos.
2. Los modelos optimizantes sirven como benchmark. Nos dan un punto de partida para construir modelos que expliquen el comportamiento de consumo.
3. Se puede tomar la posición científica de acuerdo a la cual las teorías económicas no tienen por qué basarse en supuestos ciertos, basta que predigan lo que observamos en la realidad. Es decir, la realidad es “como si” (traducción del concepto en alemán: *als ob*) los individuos optimizaran.

Este argumento, aplicado en economía entre otros por Milton Friedman, utiliza la *alegoña del billar* para ilustrar su idea central. Aún cuando los jugadores de billar no saben nada de geometría, se comportan como si supieran.

4. Para que la economía tenga poder predictivo, debe evitar que “todo sea posible”. Los interesados pueden leer el capítulo 2 del libro clásico de Paul Samuelson (es su tesis de doctorado): *Foundations of Economic Analysis*.
5. A veces, la regla óptima resulta ser simple e intuitiva, de modo que no es forzado suponer que la gente la puede “descubrir”, mediante un proceso de prueba y error. Las reglas que Deaton deriva con restricciones de liquidez son un ejemplo de este tipo.

Este argumento es más interesante cuando se aplica al comportamiento de la firma (por ejemplo, al estudiar inversión) y no tanto en el caso del comportamiento de individuos (consumo), ya que en el caso de las firmas tiene mayor sentido utilizar un argumento de tipo darwiniano (las firmas que no descubren la regla óptima eventualmente quiebran).

6. Una serie de aplicaciones son de tipo normativo, por ejemplo, queremos decir qué debe hacer un gobierno. En este caso basta con que los supuestos nos parezcan razonables para que las prescripciones del modelo sean válidas.

### 8.1 Descuento hiperbólico

A continuación revisamos brevemente una de las líneas de investigación que toman en serio el hecho que nuestro comportamiento no es tan racional como suponen los modelos vistos anteriormente. Esta línea

de investigación se conoce como aquella que supone tasa de descuento hiperbólica (en lugar de la tasa geométrica habitual)<sup>36</sup>.

El punto de partida de esta teoría es estudiar los factores de descuento que las personas efectivamente usan para comparar acciones futuras con presentes. Denotando por  $f(\tau)$  dicho factor de descuento, tenemos que éste se define notando que si el individuo está indiferente entre consumir  $q$  unidades en  $\tau_1$  y  $c_2$  unidades en  $\tau_2$ , entonces:

$$c_1 f(\tau_1) = c_2 f(\tau_2).$$

Lo anterior, junto a la normalización  $f(0) = 1$ , define el factor de descuento.

El punto central de la línea de investigación que enfatiza factores de descuento hiperbólicos es que descontamos mucho el futuro inmediato pero poco el futuro más lejano. Por ejemplo, podría tenerse la situación siguiente:

- Una hora de descanso ahora mismo, en la mitad de mi jornada de trabajo, equivale a dos horas de descanso mañana. Es decir,  $f(0) = 2f(1)$ .
- Una hora de descanso en 100 días más no difiere sustancialmente de una hora de descanso en 101 días. En tal caso  $f(100) = f(101)$ .

En las secciones anteriores siempre supusimos un factor de descuento geométrico:  $f(\tau) = \beta$ , con  $0 < \beta < 1$ . En cambio, la evidencia de sicología indica que el factor de descuento está bien aproximado por funciones hiperbólicas:

$$f(\tau) = (1 - \alpha\tau)^{-\gamma/\alpha},$$

con  $\gamma > 0$  y  $\alpha > 0$ . Para esta familia de funciones se tiene que  $f(\tau)$  cae rápidamente para  $\tau$  cercano a cero y lentamente para valores más grandes de  $\tau$ .

La función instantánea de descuento se define como  $-f'(\tau)/f(\tau)$ . Con descuento geométrico es constante (e igual a  $\log(1/\delta)$ ). En cambio, con descuento hiperbólico es igual a  $\gamma/(1 + \alpha\tau)$  y por lo tanto decreciente en  $\tau$ .

La principal característica de un individuo que toma decisiones con tasa de descuento hiperbólica es que estas decisiones serán dinámicamente inconsistentes. Es decir, lo que, visto desde hoy (período  $\tau = 0$ ), es óptimo hacer en el futuro (digamos en  $\tau = 2$ ), no será óptimo cuando se acerque el momento en cuestión ( $\tau = 1$ ). El único factor de descuento para el cual las decisiones son consistentes dinámicamente es el geométrico.

Es interesante notar que una serie de comportamientos que observamos en la práctica y que van mucho más allá del consumo/ahorro, se pueden explicar mediante descuento hiperbólico. Por ejemplo:

- Hoy decido que la próxima semana (es decir, en siete días) me pondré a dieta. Cuando falta un día para iniciar la dieta, vuelvo a postergarla en una semana.
- Análogo al anterior, pero respecto de hacer ejercicios.

La relevancia del ahorro hiperbólico para el ahorro es la siguiente:

- Si se les pregunta a los individuos cuánto quieren ahorrar, los montos que indican son mayores que su ahorro real.

---

<sup>36</sup>Los trabajos seminales son Strotz (1956) y Ainslie (1992). Laibson (1997) también es importante.

- Ahorrar en activos ilíquidos sirve como mecanismo de compromiso para resolver el problema de inconsistencia dinámica. Entre los activos de ahorro voluntario ilíquidos (o que tienen una multa si se gastan antes de tiempo) destacan las casas, la segunda cuenta en una AFP, etc<sup>37</sup>.
- Al tener fracción importante de sus ahorros en activos ilíquidos, será más difícil suavizar el consumo, por lo cual el consumo seguirá de cerca al ingreso.

---

<sup>37</sup>Un ambicioso modelo calibrando fenómenos de este tipo se encuentra en un trabajo publicado por Laibson, Andrea Repetto y coautores en BPEA.

## 9 Puzzle del premio por riesgo accionario

La pregunta central que respondemos en esta sección, es si el premio que paga el mercado por el riesgo que involucra invertir en acciones, en lugar de bonos de gobierno, es “razonable”. Para ello utilizamos las Condiciones de Optimalidad derivadas en la Sección 5. Trabajando con intervalos pequeños de tiempo  $\Delta t$  tendremos:

$$(55) \quad u'(C_t) = \frac{1 + r_t \Delta t}{1 + \delta \Delta t} E_t[u'(C_{t+\Delta t})]$$

$$(56) \quad u'(C_t) = \frac{1}{1 + \delta \Delta t} E_t[(1 + z_t \Delta t) u'(C_{t+\Delta t})],$$

donde  $r_t$  denota la tasa de interés libre de riesgo y  $z_t$  el retorno (neto) de un índice accionario.

Mediante una expansión de Taylor obtenemos:

$$(57) \quad \frac{u'(C_{t+\Delta t})}{u'(C_t)} \cong 1 - \theta g_{c,t},$$

donde hemos supuesto  $u(C) = C^{1-\theta}/(1-\theta)$  y  $g_{c,t} \equiv (C_{t+\Delta t} - C_t)/C_t$ .

Sustituyendo (57) en las Condiciones de Optimalidad:

$$(58) \quad \delta = r_t - E_t[g_{c,t}] - \theta r_t E_t[g_{c,t}]$$

$$(59) \quad \delta = E_t[z_t] - E_t[g_{c,t}] - \theta E_t[z_t \cdot g_{c,t}].$$

Restando las dos expresiones anteriores y recordando que

$$\text{Cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X)E(Y),$$

se tiene que

$$E_t[z_t] - r_t \simeq \frac{\theta \text{Cov}(z_t - r_t, g_{c,t})}{1 - \theta E_t[g_{c,t}]}.$$

La expresión del lado derecho es el premio por riesgo accionario. Como  $\text{Cov}(z_t - r_t, g_{c,t}) > 0$  se tiene que el premio por riesgo accionario crece con el coeficiente de aversión relativa al riesgo. Mehra y Prescott (1985) tomaron datos anuales para los Estados Unidos, período 1890-1979, durante el cual el premio por riesgo accionario promedio fue de un 6% anual. Esto implica un valor de  $\theta$  de 25.

Mankiw y Zeldes (1991), trabajando sólo con datos posteriores a la Segunda Guerra Mundial (1948-1982), período durante el cual el premio por riesgo accionario fue de 8%, obtienen un valor de  $\theta$  de 91.

Nadie en su sano juicio postularía un valor de  $\theta > 10$ , muy pocos  $\theta > 5$ . Los valores de  $\theta$  estimados en estudios micro varían entre 0.5 y 3.0. Es decir, la diferencia es de un orden de magnitud. Los valores implausiblemente altos de  $\theta$  justifican que se hable del *puzzle del premio por riesgo accionario*. El fenómeno también se presenta en otros países industrializados: Japón, Alemania.

En resumen, el premio por riesgo accionario es demasiado grande para ser consistente con las teorías de consumo. En un survey de Kocherkolata, publicado en el Journal of Economic Literature en 1996, se concluye que a pesar del esfuerzo de 10 años de investigación sobre el tema, aún no hay una explicación satisfactoria para el puzzle.