Universidad de Chile
Fac. de C.C.S.S. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
Centro de Economía Aplicada

IN701 – Microeconomía I
Profesor: Pablo Serra B.
Auxiliar: Andrés Hernando G.
Ayudante: Martín Osorio C.

Pauta CTP 1

Jueves 18 de Abril de 2002

1. **Ahorro por precaución**

   Un individuo vive por dos períodos. Si bien durante el primer período recibirá con certeza un ingreso $\overline{y}$, tiene incertidumbre respecto al ingreso que recibirá durante el segundo período. Vale decir, el ingreso del segundo período es una variable aleatoria. En cada período la utilidad del individuo está descrita por una función $v()$ creciente y cóncava en el consumo del período c_i y su factor de descuento intertemporal es $\beta < 1$. El individuo puede ahorrar o endeudarse durante el primer período a una tasa de interés r y muere sin deudas.

   De este modo, el individuo decide sus consumos de manera de maximizar su utilidad esperada dada por:

$$v(c_1) + \beta \mathrm{E}\left[v(c_2)\right]$$

   sujeto a su restricción presupuestaria.

   Suponga que $v(c_i) = -\mathrm{e}^{-\rho c_i}$.

   (a) Muestre que ρ es el coeficiente de aversión absoluta al riesgo del individuo.

   Respuesta: El coeficiente de aversión absoluta al riesgo se define como:

$$CAAR = -\frac{v''(c_i)}{v'(c_i)} = -\frac{-\rho^2 \mathrm{e}^{-\rho c_i}}{\rho \mathrm{e}^{-\rho c_i}} = \rho$$

   (b) Suponga que el ingreso del segundo periodo es $\overline{y}$ (es decir, no hay incertidumbre respecto al ingreso). Encuentre el ahorro óptimo del individuo en el primer periodo, a_s^*.

   Respuesta: La restricción presupuestaria del individuo se deduce de la siguiente forma:

   - El ahorro en el primer periodo es:

$$a_s^* = \overline{y} - c_1$$

   - El ingreso total en el segundo periodo es:

$$y + (1+r)a_s^* = y + (1+r)(\overline{y} - c_1)$$

   - Como el individuo muere sin deudas y no tiene motivo para dejar herencia:

$$c_2 = y + (1+r)(\overline{y} - c_1)$$

     Esta última expresión es la restricción presupuestaria.

   Como en este caso no hay incertidumbre respecto al ingreso en el segundo periodo (i.e. $y = \overline{y}$), el problema del individuo es:

$$\max_{c_1, c_2} \quad -\mathrm{e}^{-\rho c_1} - \beta \mathrm{e}^{-\rho c_2}$$
$$\text{s.a.}$$
$$c_2 = \overline{y} + (1+r)(\overline{y} - c_1)$$

   El lagrangeano de este problema es:

$$\mathcal{L} = -\mathrm{e}^{-\rho c_1} - \beta \mathrm{e}^{-\rho c_2} - \lambda\left[c_2 - \overline{y} - (1+r)(\overline{y} - c_1)\right]$$

Luego, las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} c_1: &\quad \rho \mathrm{e}^{-\rho c_1} - \lambda(1+r) = 0 \\ c_2: &\quad \beta\rho \mathrm{e}^{-\rho c_2} - \lambda = 0 \end{aligned}$$

De donde:

$$\mathrm{e}^{-\rho c_1} = \beta(1+r)\mathrm{e}^{-\rho c_2}$$

o, equivalentemente:

$$-\rho c_1 = \ln(\beta(1+r)) - \rho c_2$$

reemplazando la restricción presupuestaria y despejando para c_1 se obtiene:

$$\begin{aligned} -\rho c_1 &= \ln(\beta(1+r)) - \rho\left[y + (1+r)(\overline{y} - c_1)\right] \\ c_1 &= -\frac{\ln(\beta(1+r))}{\rho(2+r)} + \overline{y} \end{aligned}$$

De donde:

$$a_s^* = \frac{\ln(\beta(1+r))}{\rho(2+r)} \tag{1}$$

(c) Suponga ahora que el ingreso del segundo periodo es una variable aleatoria distribuida normalmente con media $\overline{y}$ y varianza σ_y^2. Encuentre el ahorro óptimo del individuo en el primer periodo, a_i^*.[1]

Respuesta:

El problema que resuelve el individuo es:

$$\begin{aligned} \max_{c_1,c_2} &\quad v(c_1) + \beta \mathrm{E}\left[v(c_2)\right] \\ \text{s.a.} & \\ &\quad (1+r)(\overline{y} - c_1) + y = c_2 \end{aligned}$$

Luego, el lagrangeano de este problema es:

$$\mathcal{L} = v(c_1) + \beta \mathrm{E}\left[v(c_2)\right] - \lambda\left((1+r)(\overline{y} - c_1) + y - c_2\right)$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} c_1: &\quad v'(c1) + \lambda(1+r) = 0 \\ c_2: &\quad \beta \mathrm{E}\left[v'(c_2)\right] + \lambda = 0 \end{aligned}$$

Lo que conduce a la siguiente ecuación de Euler:

$$v'(c_1) = \beta(1+r)\mathrm{E}\left[v'(c_2)\right]$$

Notando que $v'(c_2) = \rho \mathrm{e}^{-\rho c_2}$ y usando la restricción presupuestaria se tiene:

$$\mathrm{E}\left[v'(c_2)\right] = \rho \mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{-\rho c_2}\right] = \rho \mathrm{e}^{-\rho(1+r)(\overline{y}-c_1)} \mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{-\rho y}\right]$$

Usando la indicación, se obtiene:

$$\mathrm{E}\left[v'(c_2)\right] = \rho \mathrm{e}^{-\rho(1+r)(\overline{y}-c_1)} \mathrm{e}^{-\rho\left(\overline{y} - \frac{\rho\sigma_y^2}{2}\right)}$$

[1] Indicación: Si x es una variable aleatoria con distribución normal de media μ y varianza σ^2 entonces:

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{\alpha x}\right] = \mathrm{e}^{\alpha\left(\mu + \frac{1}{2}\alpha\sigma^2\right)}$$

Lo que, reemplazado en la ecuación de Euler conduce a:

$$e^{-\rho c_1(2+r)} = \beta(1+r)e^{-\rho\left(\overline{y}(2+r)-\frac{\rho\sigma_y^2}{2}\right)}$$

De donde:

$$c_1 = -\frac{\ln\left(\beta(1+r)\right)}{\rho(2+r)} + \frac{1}{2+r}\left[\overline{y}(2+r) - \frac{\rho\sigma_y^2}{2}\right]$$

Por lo tanto:

$$a_i^* = \frac{\ln\left(\beta(1+r)\right)}{\rho(2+r)} + \frac{\rho\sigma_y^2}{2(2+r)} \tag{2}$$

(d) Calcule la diferencia $a_i^* - a_s^*$. Determine como depende esta diferencia de $\overline{y}$, σ_y^2, β, ρ y r. De una intuición para su respuesta y explique por qué esta diferencia se denomina, en la literatura del consumo, *ahorro por motivo de precaución*.

Respuesta: De (1) y (2):

$$a_s^* - a_i^* = \frac{\rho\sigma_y^2}{2(2+r)}$$

Por lo tanto, la diferencia no depende de $\overline{y}$ o de β y es creciente en el coeficiente de aversión absoluta al riesgo (ρ) y en la varianza del ingreso (σ_y^2) y decreciente en la tasa de interés r.

Dado que la aversión absoluta al riesgo del individuo es constante, es esperable que este sobreahorro no dependa del ingreso esperado en el segundo periodo, ya que este ingreso esperado es igual al que recibe en el primer periodo.

Los otros signos son bastante obvios, si el individuo es más averso al riesgo, debería ahorrar más para protegerse del *shock* del segundo periodo. Lo mismo ocurre si este *shock* es más grande o la volatilidad del mismo es mayor, lo que se refleja en la dependencia de σ_y. Finalmente, si la tasa de interés aumenta, entonces el colchón de ahorro se hará más grande por lo cual el individuo puede sobreahorrar menos para asegurarse en el segundo periodo.

Este sobreahorro se conoce como *ahorro por motivo de precaución* ya que es, obviamente, un ahorro en que el individuo incurre únicamente porque desea tener cobertura ante el evento de sufrir ingresos menores en el segundo periodo. Es decir, el individuo ahorra esta cantidad extra como una forma de asegurarse.

2. **Producción**

Una firma tiene disponibles dos tecnologías mutuamente excluyentes. La primera tecnología (T_1) queda representada por la siguiente función de producción:

$$T_1: \quad q = \min\left[\frac{K}{a}, \frac{L}{b}\right]$$

La segunda tecnología (T_2), por otra parte es representada por la siguiente función de producción:

$$T_2: \quad q = K^{1/3}L^{1/3}$$

En ambas expresiones, K representa el capital y L representa el trabajo, los que se contratan a precios r y w, respectivamente.

(a) Encuentre la función de costos asociada a cada tecnología, verifique las propiedades vistas en clase.

Respuesta:

Para (T_1), como es obvio, la firma no mantendrá ninguno de los insumos en exceso (basta notar que los insumos son caros, por lo cual cualquier combinación tal que $\frac{K}{a} \neq \frac{L}{b}$ es ineficiente).

Luego:

$$\frac{K}{a} = \frac{L}{b} = q$$

lo que implica:

$$K = aq \quad L = bq$$

por lo que:

$$\phi_1(q, w, r) = (ra + wb)q$$

Como esta función es lineal en r y w se cumple, automáticamente, que es cóncava en (r, w) y también lo es en q.
Por otra parte:

$$\phi_1(q, \alpha w, \alpha r) = (\alpha ra + \alpha wb)q = \alpha(ra + wb)q = \alpha\phi_1(q, w, r)$$

por lo que se cumple que es homogénea de grado 1 en los precios de los factores.
Finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} &= aq = K \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial w} &= bq = L \end{aligned}$$

Por lo que también se cumplen las propiedades derivativas.
Para T_2 tenemos que el problema que resuelve la firma es:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{K,L} & rK + wL \\ \text{s.a.} & \\ & q \leq K^{1/3}L^{1/3} \end{array}$$

Las condiciones de primer orden de este problema conducen a:

$$\frac{L}{K} = \frac{r}{w}$$

que, combinado con la restricción suponiendo que se cumple estrictamente (aquí puede darse un argumento similar al usado para T_1: dado que los factores son escasos, la firma no deseará mantenerlos en exceso):

$$q = \left(\frac{r}{w}\right)^{1/3} K^{2/3}$$

de donde:

$$K = \left(\frac{w}{r}\right)^{1/2} q^{3/2} \quad L = \left(\frac{r}{w}\right)^{1/2} q^{3/2}$$

por lo tanto:

$$\phi_2(q, w, r) = rK + wL = 2(rw)^{1/2}q^{3/2}$$

Manteniendo q fijo y dado que $f(x) = \sqrt{x}$ es una función cóncava, es fácil ver que $\phi_2(q, w, r)$ debe ser cóncava en (w, r). En efecto, dado que:

$$\begin{aligned} & \alpha\sqrt{x_1} + (1-\alpha)\sqrt{x_2} \leq \sqrt{\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2} \\ \Rightarrow \quad & \alpha q^{3/2}\sqrt{x_1} + (1-\alpha)q^{3/2}\sqrt{x_2} \leq q^{3/2}\sqrt{\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2} \end{aligned}$$

y haciendo $x_1 = w_1 r_1$ y $x_2 = w_2 r_2$, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \alpha q^{3/2}\sqrt{w_1 r_1} + (1-\alpha)q^{3/2}\sqrt{w_2 r_2} \leq q^{3/2}\sqrt{\alpha w_1 r_1 + (1-\alpha)w_2 r_2} \\ \Rightarrow \quad & \alpha\phi_2(q, w_1, r_1) + (1-\alpha)\phi_2(q, w_2, r_2) \leq \phi_2(q, \alpha w_1 + (1-\alpha)w_2, \alpha r_1 + (1-\alpha)r_2) \end{aligned}$$

por lo tanto, ϕ_2 es cóncava en (w, r).

Por otra parte:

$$\phi_2(q, \alpha w, \alpha r) = 2(\alpha^2 rw)^{1/2} q^{3/2} = 2\alpha(rw)^{1/2} q^{3/2} = \alpha\phi_2(q, w, r)$$

Por lo que se cumple la homogeneidad de grado 1 en (w, r).
Finalmente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_2}{\partial r} &= \left(\frac{w}{r}\right)^{1/2} q^{3/2} = K \\
\frac{\partial \phi_2}{\partial w} &= \left(\frac{r}{w}\right)^{1/2} q^{3/2} = L
\end{aligned}$$

Por lo que se cumplen las propiedades derivativas.

(b) Escriba la función de costos totales de largo plazo de la firma y comente su resultado. Sin hacer cálculos extra conteste, ¿cumple esta función de costos con las propiedades vistas en clase?

Respuesta: Como las tecnologías T_1 y T_2 son mutuamente excluyentes, la firma debe encontrar un nivel de producción $\underline{q}$ a partir del cual usar cada una.

Una firma maximizadora de utilidad elegirá siempre la tecnología que le permite producir a mínimo costo, luego, se usa la tecnología 2 mientras:

$$\phi_2(q, w, r) \leq \phi_1(q, w, r)$$

Luego, el cambio (si es que ocurre) ocurre para $\underline{q}$:

$$\begin{aligned}
\phi_2(\underline{q}, w, r) &= \phi_1(\underline{q}, w, r) \\
2(rw)^{1/2}\underline{q}^{3/2} &= (ra + wb)\underline{q} \\
\underline{q} &= \frac{(ra + wb)^2}{4rw}
\end{aligned}$$

Luego, la función de costos de largo plazo de la firma es:

$$\phi(q, w, r) = \begin{cases} 2(rw)^{1/2} q^{3/2} & \text{si} \quad q \leq \frac{(ra+wb)^2}{4rw} \\ (ra + wb)q & \text{si} \quad q > \frac{(ra+wb)^2}{4rw} \end{cases}$$

Como cada componente cumple con las condiciones vistas en clase, esta función de costos también lo hace.