Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería Industrial
Semestre Otoño 2001

IN701: Microeconomía I
Prof.: Pablo Serra B.
Aux.: Andrés Hernando G.

CTP 1

16 de Abril de 2001

1. Un individuo tiene una función de utilidad $u(c, e) = ce^2$ donde c son las unidades de consumo (en bienes físicos) y e es el ocio. Sea p el precio del bien de consumo y w el salario.

   (a) Derive la función de oferta de trabajo del consumidor y las funciones de demanda por bienes de consumo y ocio. Suponga que el consumidor no tiene otro ingreso que el trabajo.

   El problema de maximización restringida del consumidor es:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{c,e} & ce^2 \\ s.a. & \\ & pc \leq w(1-e) \end{array}$$

   Donde hemos supuesto que el individuo cuenta con una unidad de tiempo y sólo gasta su ingreso en consumir los bienes.

   Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} e^2 &= \lambda p \\ 2ce &= \lambda w \end{aligned}$$

   De donde:

$$e = \frac{2cp}{w}$$

   reemplazando en la restricción presupuestaria se obtiene:

$$\begin{aligned} e^* &= \frac{2}{3} \\ c^* &= \frac{w}{3p} \end{aligned}$$

   (b) Discuta como cambia su respuesta en (a) si una fracción s del gasto en bienes de consumo está cubierto por un programa de subsidios hasta un máximo de c_0 unidades. Ilustre el óptimo del consumidor en un diagrama apropiado.

   En este caso hay dos escenarios posibles:

   i. El límite no es relevante. (Figura 1)
   En este caso, la restricción presupuestaria original (línea punteada) se transforma en la restricción presupuestaria con subsidio (línea continua). Se tiene: $e^* = 2/3$ y $c^* = w/3p(1-s)$, es decir, el subsidio sólo aumenta la demanda por bienes, pero no afecta la oferta de trabajo.

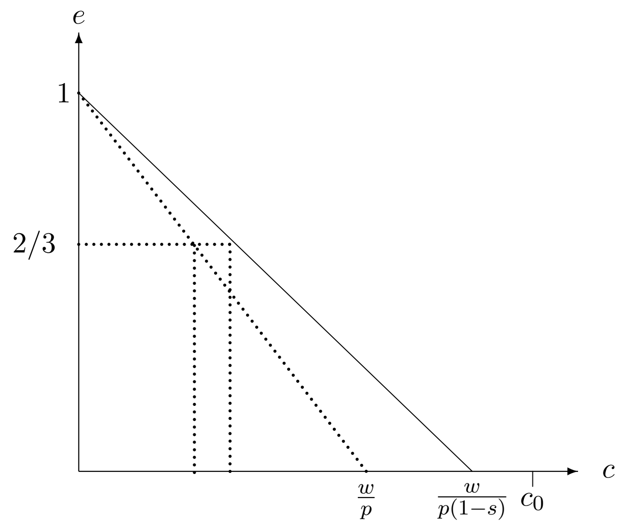

Figura 1: Cuando el límite del subsidio no afecta el equilibrio

ii. El límite es relevante. (Figura 2)
En este caso, el óptimo puede estar en uno de los dos tramos. Si, como en el panel A, el óptimo está en un punto tal que $c < c_0$ no hay efectos sobre el ocio y se tiene el mismo resultado anterior.
Si, como en el panel B, el óptimo está en el segundo tramo (es decir, $c > c_0$) se tiene el resultado más interesante: $c = (w + psc_0)/3p$ y $e = 2/3(1 + psc_0/w)$, es decir, el subsidio aumenta la oferta de trabajo.

(c) Discuta el efecto de:

i. una reducción en el límite c_0 del subsidio.
Una reducción en el límite c_0 podría aumentar la oferta de trabajo del individuo si se pasa de una situación como la mostrada en la panel A de la figura 2 a una como la presentada en el panel B.

ii. una reducción de la tasa de subsidio s.
El efecto es el mismo de la parte anterior.

2. En un país pequeño existen sólo dos bienes: cerveza y pizza. Los siguientes son los precios y compras agregadas en dos años diferentes:

Año	**Precios**		**Cantidades Compradas**	
	Pizza	Cerveza	Pizza	Cerveza
1995	3.00	6.00	100	50
1998	4.40	5.60	70	70

(a) Calcule los índices de Laspeyres y Paasche. ¿Cuánto han subido los precios entre 1995 y 1998?
El índice de Laspeyres se define como:

$$I_L = \frac{p_t' q_0}{p_0' q_0}$$

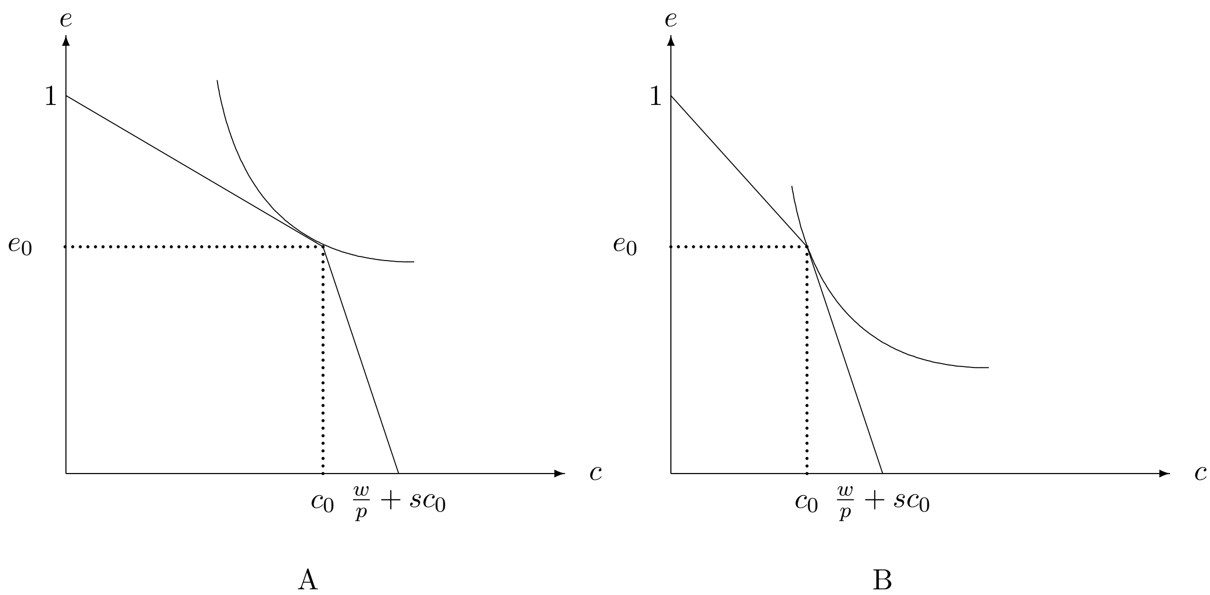

Figura 2: Cuando el límite del subsidio afecta el equilibrio

y el índice de Paasche como:

$$I_P = \frac{p_t' q_t}{p_0' q_t}$$

Es decir, el primero considera la relación entre el costo actual de la canasta óptima del año base y el costo de la misma canasta en el año base, mientras que el índice de Paasche considera la relación entre el costo que tenía en el año base la canasta óptima actual y el costo actual de la misma canasta.

En este caso:

$$I_L = \frac{4.4{\cdot}100 + 5.6{\cdot}50}{3{\cdot}100 + 6{\cdot}50} = \frac{440 + 280}{300 + 300} = 1.2$$

y:

$$I_P = \frac{4.4{\cdot}70 + 5.6{\cdot}70}{3{\cdot}70 + 6{\cdot}70} = \frac{308 + 392}{210 + 420} = 1.11$$

Es decir, recordando que el índice de Paasche *subestima* el alza del costo de la vida y que el índice de Laspeyres *sobreestima* la misma, tenemos que, entre 1995 y 1998 el costo de la vida se incrementó entre un 11% y un 20%

(b) ¿Los consumidores están mejor o peor en 1998? Dado que el costo de la vida se incrementó entre un 11 y un 20% y que el ingreso cambió en:

$$\Delta y = \frac{4.4{\cdot}70 + 5.6{\cdot}70}{3{\cdot}100 + 6{\cdot}50} = \frac{308 + 392}{300 + 300} = 1.16$$

los consumidores pueden estar mejor o peor que antes. Si:

$$11\% \leq \Delta C \leq \Delta y = 16\%$$

los consumidores están mejor, si:

$$16\% = \Delta y \leq \Delta C \leq 20\%$$

los consumidores estarán peor.

(c) Suponga que un consumidor amante de la cerveza compró 4 pizzas y 8 cervezas en 1995, mientras que en 1998 compró 3.5 pizzas y 9.75 cervezas. ¿Está mejor o peor este consumidor en 1998?

Una forma de hacerlo es considerar los indices para este consumidor en particular, $I_L = 1.04$ e $I_P = 1.014$, la variación del ingreso (16%) es superior a ambos por lo que el consumidor está mejor.

Una forma más elegante es notar que, con el ingreso de 1995 (60) no habría podido comprar la canasta de 1998 (que costaba 69). Sin embargo, con el ingreso de 1998 (70) sí habría podido comprar la canasta de 1995 (que costaba sólo 62.4) luego, invocando algún *axioma de preferencias reveladas* el consumidor *tiene* que estar mejor en 1998.

(d) ¿Qué enseñanza señalaría a partir de las diferencias entre sus respuestas en (b) y (c)?

Que los datos que pueden ser ambiguos para un conjunto de consumidores no lo son cuando se mira cada consumidor por separado. Es decir, que la pérdida de información al momento de agregar (llamado *problema de agregación*) es importante al considerar problemas como el del costo de la vida.

3. Suponga un consumidor que tiene la siguiente función de utilidad:

$$u = \log(x) + \alpha \log(y - c) \qquad \alpha < 1,\ c > 0$$

Los precios de los bienes x e y son p_x y p_y, respectivamente y el consumidor tiene ingreso w.

(a) Interprete el parámetro c.

El parámetro c representa un consumo mínimo del bien y que es necesario antes que comience a reportar utilidad. Si pensamos en el bien y como un bien de primera necesidad (lo que es reafirmado por el hecho que $\alpha < 1$) como los alimentos, podemos interpretar c como el nivel de consumo de subsistencia.

(b) Encuentre las demandas *marshallianas* por x e y y la función de utilidad indirecta $v(p, w)$.

El problema del consumidor es:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & \log(x) + \alpha \log(y - c) \\ s.a \quad & \\ & p_x x + p_y y \leq w \end{aligned}$$

El lagrangeano de este problema es:

$$\mathcal{L} = \log(x) + \alpha \log(y - c) - \lambda \left[p_x x + p_y y - w \right]$$

de donde las CPO's son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{1}{x} - \lambda p_x = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\alpha}{y - c} - \lambda p_y = 0 \tag{2}$$

Combinando (1) y (2) se obtiene:

$$x = \frac{(y - c) p_y}{\alpha p_x}$$

Utilizando este resultado en la restricción presupuestaria (con igualdad) se obtiene:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\alpha w + p_y c}{(1+\alpha)p_y} \\ x &= \frac{w - p_y c}{(1+\alpha)p_x} \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando estos valores en la expresión para la utilidad:

$$\begin{aligned} v(p,w) &= \log\left(\frac{w-p_y c}{(1+\alpha)p_x}\right) + \alpha\log\left(\frac{\alpha w + p_y c}{(1+\alpha)p_y} - c\right) \\ &= \log\left(\frac{w-p_y c}{(1+\alpha)p_x}\right) + \alpha\log\left(\frac{\alpha(w - p_y c)}{(1+\alpha)p_y}\right) \\ &= \log\left(\frac{w-p_y c}{1+\alpha}\right) - \log p_x + \alpha\log\left(\frac{w-p_y c}{1+\alpha}\right) + \alpha\log\alpha - \alpha\log p_y \\ &= (1+\alpha)\log\left(\frac{w-p_y c}{1+\alpha}\right) + \log\left(\frac{\alpha^\alpha}{p_x p_y^\alpha}\right) \end{aligned}$$

(c) Encuentre la función de gasto $e(u,p)$ y derive las demandas compensadas h_x y h_y. Verifique la ecuación de *Slutzky*.

Recordando que, en equilibrio:

$$u = v\left(p, e(u,p)\right)$$

tenemos:

$$\begin{aligned} u &= (1+\alpha)\log\left(\frac{e(u,p)-p_y c}{1+\alpha}\right) + \log\left(\frac{\alpha^\alpha}{p_x p_y^\alpha}\right) \\ (1+\alpha)\log\left(\frac{e(u,p)-p_y c}{1+\alpha}\right) &= u - \log\left(\frac{\alpha^\alpha}{p_x p_y^\alpha}\right) \\ \left(\frac{e(u,p)-p_y c}{1+\alpha}\right)^{(1+\alpha)} &= \frac{\mathrm{e}^u p_x p_y^\alpha}{\alpha^\alpha} \\ e(u,p) &= (1+\alpha)\left[\frac{\mathrm{e}^u p_x p_y^\alpha}{\alpha^\alpha}\right]^{\frac{1}{1+\alpha}} + p_y c \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} h_x &= \left[\frac{\mathrm{e}^u p_y^\alpha}{\alpha^\alpha}\right]^{\frac{1}{1+\alpha}} p_x^{\frac{-\alpha}{1+\alpha}} \\ h_y &= \alpha\left[\frac{\mathrm{e}^u p_x}{\alpha^\alpha}\right]^{\frac{1}{1+\alpha}} p_y^{\frac{-1}{1+\alpha}} + c \end{aligned}$$

Notando que:

$$\frac{\partial h_x}{\partial p_y} = \left[\frac{\mathrm{e}^u}{\alpha^\alpha}\right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \frac{\alpha}{1+\alpha} p_y^{-\frac{1}{1+\alpha}} p_x^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}$$

de donde, con un poco de álgebra:

$$\frac{\partial h_x}{\partial p_y} = \frac{(w-p_y c)\alpha}{(1+\alpha)^2 p_y p_x}$$

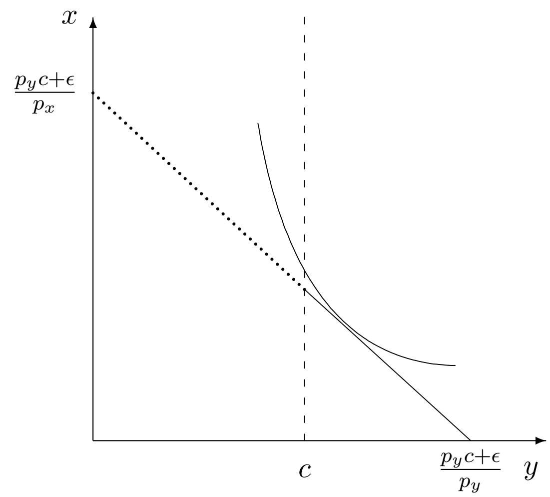

Figura 3: Equilibrio inicial.

Al mismo tiempo:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial p_y} &= \frac{-c}{p_x(1+\alpha)} \\
\frac{\partial x}{\partial w} y &= \frac{\alpha w + p_y c}{(1+\alpha)^2 p_x p_y} \\
\frac{\partial x}{\partial p_y} + \frac{\partial x}{\partial w} y &= \frac{\alpha w + p_y c - p_y c(1+\alpha)}{p_x p_y (1+\alpha)^2} \\
&= \frac{(w - p_y c)\alpha}{(1+\alpha)^2 p_y p_x}
\end{aligned}
$$

con lo que se cumple la ecuación de *Slutzky*.

(d) Suponga que $w = p_y c + \epsilon$ y que se produce un alza del precio de y de p_y a $p_y + \Delta p_y$ tal que $\epsilon \leq \Delta p_y c$ muestre gráficamente qué ocurre con el óptimo del consumidor.

La figura 3 muestra el equilibrio inicial. Debe notarse que la restricción presupuestaria relevante es aquella que está a la derecha de la recta vertical $y = c$ (Línea continua).

El efecto del aumento de precios se observa en la figura 4, en este caso ($\Delta p_y c = \epsilon$) la restricción presupuestaria relevante colapsa al punto $y = c, x = 0$ y la utilidad cae a $-\infty$. En consecuencia, el individuo sólo consume en este punto.

(e) (bonus) Muestre que las demandas derivadas en (b) no son válidas en el caso (d). Escriba las demandas correctas y verifique la ecuación de *Slutzky* en el caso presentado en (d).

Lo que ocurre, es que las demandas en (b) sólo son válidas cuando $w \geq p_y c$. En el caso en que $w < p_y c$ la función de utilidad se indefine, sin embargo, por el argumento dado en (a) podemos suponer que, las demandas correctas son:

$$
\begin{aligned}
x &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad w < p_y c \\ \frac{w - p_y c}{(1+\alpha) p_x} & \text{si} \quad w > p_y c \end{cases} \\
y &= \begin{cases} \frac{w}{p_y} & \text{si} \quad w < p_y c \\ \frac{\alpha w + p_y c}{(1+\alpha) p_y} & \text{si} \quad w > p_y c \end{cases}
\end{aligned}
$$

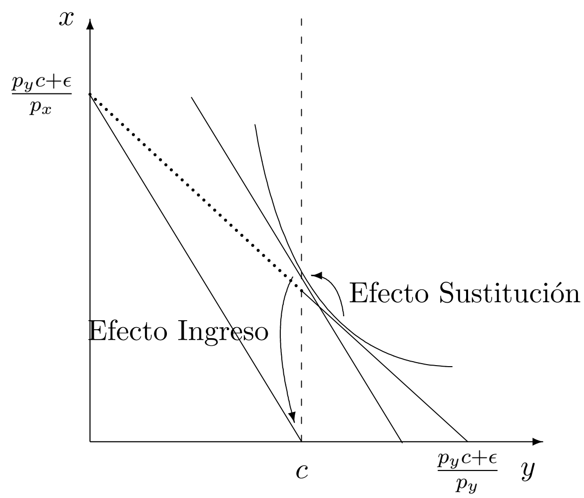

Figura 4: Equilibrio final.

Luego, en casos como el de la parte (b), las ecuaciones correctas son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_x}{\partial p_y} &= h_x p_y \\
\frac{\partial x}{\partial p_y} &= 0 \\
\frac{\partial x}{\partial w} &= x p_y
\end{aligned}$$

con lo que, nuevamente, se cumple la ecuación de *Slutzky*.