Universidad de Chile
Fac. de C.C.S.S. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
Centro de Economía Aplicada

*IN701 – Microeconomía I*
*Profesor: Pablo Serra B.*
*Auxiliar: Andrés Hernando G.*
*Ayudante: Martín Osorio C.*

# Control 2

Viernes 14 de Junio de 2002

1. (20 %) Conteste las siguientes preguntas.

   *a*) Muestre la existencia de EG en una economía de intercambio donde las preferencias de las personas son estrictamente convexas y monótonas. Puede hacerlo para el caso de dos bienes.

   **Respuesta:** Dada la forma de las preferencias, se tendrá que las demandas por los bienes son continuas y que tienden a cero cuando el precio relativo del bien tiende a infinito.

   Por ley de Walras, bastará que un mercado esté en equilibrio para que el otro también lo esté. Ahora bien, sea $p$ el precio relativo del bien 1, si $p \to 0$ entonces existirá exceso de demanda para este bien $Z_1(p) > 0$, del mismo modo, si $p \to \infty$ existirá un exceso de oferta para este bien $Z_1(p) < 0$. Por continuidad, entonces, existe algún $\bar{p}$ tal que no hay exceso de demanda ni exceso de oferta para el bien 1, es decir, el mercado del bien 1 esté en equilibrio $Z_1(\bar{p}) = 0$. Por lo mismo, cualquier vector de precios tal que $p_1/p_2 = \bar{p}$ es un equilibrio general.

   *b*) ¿Cuál es la relevancia de que una economía sea regular? Muestre informalmente que en una economía regular el número de equilibrios generales es finito.

   **Respuesta:** Un equilibrio general se dice regular cuando la matriz de efectos de precios $Dz(p)$ es no singular, es decir, tiene rango $n-1$. Si todo equilibrio general de la economía es regular, entonces se dice que la economía es regular.

   Intuitivamente, esto significa que, existe una vecindad en torno de cualquier equilibrio general tal que no contiene otros equilibrios generales y, más aún, el gradiente de la función de exceso de demanda en dicho punto es distinto de cero.

   La relevancia de las economías regulares es que, ante cambios pequeños, las propiedades del equilibrio general siguen manteniéndose (es decir, no existen singularidades que cambien cualitativamente el equilibrio). Estas condiciones permiten hacer análisis de estática comparativa ante shocks (es decir, es válido comparar el equilibrio inicial con el equilibrio final, sin tener que analizar todos los efectos cruzados).

   En una economía regular, como se muestra en la figura 1, no sólo existe un número finito de equilibrios sino que este número es, además, impar.

   *c*) En un modelo de equilibrio parcial discuta cuáles son las condiciones para que éste sea estable cuando las expectativas son miopes (recuerde el modelo de la telaraña)

   **Respuesta:** En general, se necesita que las cantidades ofrecidas no varíen demasiado ante cambios en los precios (ya que los oferentes usan el precio pasado para estimar el precio corriente) y que el precio al que compran los demandantes tampoco sea demasiado sensible a estos cambios en las cantidades. De cualquier forma, bastará con que la demanda sea más elástica que la oferta para que el modelo converja y sea estable.

2. (15 %) En una industria constituida por n firmas la función de producción de cada firma está dada por:

$$q = f(x, X)$$

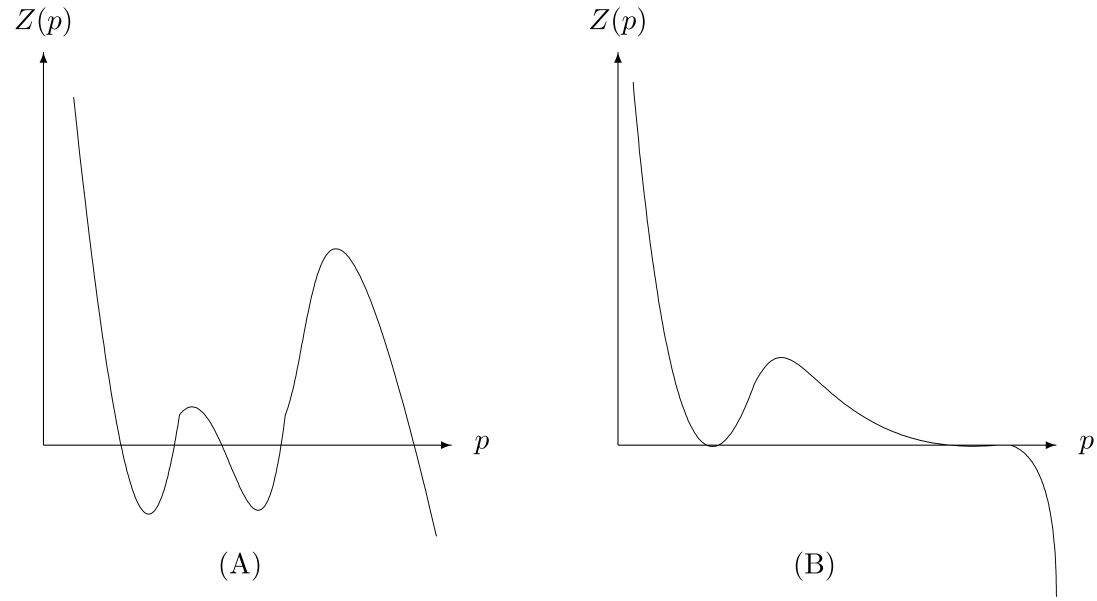


Figura 1: Pregunta 1, (A) Economía regular y (B) Economía no regular

donde $q$ es la producción de la firma, $x$ la cantidad de insumo que usa la firma y $X$ la cantidad de insumo que usa la industria. Suponiendo que la industria produce un bien transable y usa insumos transables, por lo que no afecta los precios.

*a*) ¿Cuál es la condición que determina el nivel de producción si todas las firmas maximizan su utilidad en forma independiente?

**Respuesta:** Las utilidades de la firma individual están dadas por:

$$\pi = pf(x, X) - wx$$

Donde $w$ representa el pago al insumo y $x$ la cantidad de insumo contratada por la firma. Luego, el problema de la firma es:

$$\max_x pf(x, X) - wx$$

Y la condición de primer orden es:

$$p\frac{\partial f(x, X)}{\partial x} = w$$

Es decir, la productividad marginal valorada (privada) debe ser igual al costo privado de contratación. Es decir, la firma individual ignora el efecto de su propia contratación $x$ en la contratación total de la industria $X$.

*b*) ¿Cuál es la condición que determina el nivel de producción socialmente óptimo? ¿Cuál es mayor?

**Respuesta:** En este caso, la firma no ignora el efecto de su contratación en la contratación total de la industria. Ya sea porque la optimización se realiza centralmente (planificador social benevolente) o porque la firma internaliza la externalidad.

El problema es:

$$
\begin{aligned}
\max_{x} \quad & pf(x, X) - wx \\
\text{s.a.} \quad & \\
& X = \sum_{i}^{n} x_i
\end{aligned}
$$

La condición de primer orden es:

$$p\left\{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial X}\frac{dX}{dx}\right\} = w$$

En equilibrio, todos los $x_i$ son iguales y, por lo tanto $X = nx$ de donde la CPO puede escribirse como:

$$p\frac{\partial f}{\partial x} + pn\frac{\partial f}{\partial X} = w$$

Es decir, la productividad marginal valorada (social) es igual al costo privado marginal de contratación.

Se debe notar que, si:

- $\frac{\partial f}{\partial X} > 0$ entonces la productividad aumenta con la contratación total (externalidad positiva) y el nivel de contratación será más alto que en el caso privado.
- $\frac{\partial f}{\partial X} < 0$ entonces la productividad disminuye con la contratación total (externalidad negativa) y el nivel de contratación será más bajo que en el caso privado.

*c*) Discuta las distintas políticas para alcanzar el óptimo social en una economía descentralizada.

**Respuesta:** Como se trata de una externalidad en la contratación, el mecanismo obvio de influir en la decisión de las plantas es a través del salario. En efecto, si la contratación privada es inferior a la socialmente óptima, entonces un subsidio a la contratación (rebajar el salario) pondría el incentivo correcto a que las firmas individuales decidieran contratar más. Al revés, si el nivel de contratación privado es demasiado alto, un impuesto a la contratación permitiría que las firmas internalicen este efecto y disminuyan su contratación.

3. (15 %) Una empresa de agua potable da servicio a varias familias, cada una de las cuales tiene una demanda que está dada por:

$$P = a - bq$$

El costo marginal del monopolista es constante e igual a $C$.

*a*) Encuentre la solución que maximiza las ganancias del monopolista cuando sólo cobra un cargo variable

**Respuesta:**

Si el monopolista sólo cobra un cargo variable, resuelve el siguiente problema[1]:

$$\max_{q}(a - bq)q - cq$$

[1] Notar que, como todas las familias son iguales y el costo marginal es constante, resolver el problema para una familia es lo mismo que resolverla para todas

La condición de primer orden es:

$$a - 2bq - c = 0$$

Que conduce a:

$$q = \frac{a-c}{2b} \qquad p = \frac{a+c}{2}$$

Donde supusimos $a > c$, de lo contrario $q = 0$ y $p \geq a$ caso que ignoramos en el resto del problema.

*b*) ¿Cómo cambia la respuesta anterior si el monopolista además de un cargo variable cobra un cargo fijo?

**Respuesta:** Intuitivamente, el monopolista debería extraer todo el excedente[2] de los consumidores usando el cargo fijo y luego cobrarles a costo marginal por consumir.

Para los amantes de los símbolos, el problema es el siguiente:

$$\begin{aligned} \max_{q,F} \quad & (a - bq)q - cq + F \\ \text{s.a.} \quad & \\ & \frac{bq^2}{2} - F \geq 0 \end{aligned}$$

Donde la restricción representa la condicón de participación, es decir, que la familia obtenga excedentes no negativos en la relación.

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} q - 2bq - c + \lambda bq &= 0 \\ 1 - \lambda &= 0 \end{aligned}$$

La segunda CPO ($\lambda = 1$) implica que la restricción será activa. La primera, implica que:

$$q = \frac{a-c}{b} \qquad p = c$$

Luego,

$$F = \frac{(a-c)^2}{2b}$$

*c*) ¿Qué sistema tarifario debería fijar un regulador benevolente?

**Respuesta:** Al planificador social benevolente, le interesa, ante todo, maximizar los excedentes totales (sin consideraciones redistributivas) en consecuencia, dado que el sistema de tarifa en dos partes maximiza los excedentes y el sistema de un solo cargo fijo no lo hace, el PSB debería optar por la opción de dos tramos (cargo fijo + cargo variable).

*d*) Suponga ahora que la mitad de las familias tiene una demanda

$$P = a_1 - bq$$

Y la otra mitad tiene una demanda.

$$P = a_2 - bq$$

[2]En rigor, la variación compensatoria que los deja indiferentes entre consumir y no hacerlo. Sin embargo, dado que no contamos con la función de utilidad, supondremos que el gasto en agua es una parte pequeña del presupuesto de las familias con lo que los excedentes aproximan bien dicha variación compensatoria.

¿Qué precios pondría el monopolista si se permite discriminar y si no se le permite discriminar pero puede ofrecer un menú de tarifas para que las personas elijan?

**Respuesta:** Si sólo puede cobrar un precio y puede discriminar, cobraría los precios vistos en la parte (a), es decir:

$$p_1 = \frac{a_1 + c}{2} \qquad p_2 = \frac{a_2 + c}{2}$$

Si cobra tarifas de dos partes y puede discriminar las tarifas serían:

$$G_1 : \left( \frac{(a_1 - c)^2}{2b}, c \right) \qquad G_2 : \left( \frac{(a_2 - c)^2}{2b}, c \right)$$

Donde $G_i$ representa al $i$-ésimo grupo.

Si no puede discriminar, pero puede elegir un menú de tarifas, entonces debe resolver un problema un tanto más complejo. En efecto, las tarifas para cada grupo deben crearse de modo que:

- Maximicen la utilidad total.
- Cada grupo tiene excedentes no negativos cuando elige la tarifa diseñada para el grupo.
- Cada grupo está mejor si elige la tarifa diseñada para el que si elige la otra tarifa.

La segunda condición generará dos restricciones de *participación* la tercera condición generará dos restricciones de *autoselección* (a veces, también llamada de *compatibilidad de incentivos*).

El problema del monopolio es:

$$\begin{aligned}
\max_{F_1, F_2, p_1, p_2} \quad & p_1 \frac{a_1 - p_1}{b} + p_2 \frac{a_2 - p_2}{b} - c \frac{a_1 + a_2 - p_1 - p_2}{b} + F_1 + F_2 \\
\text{s.a.} \quad & \\
& \frac{(a_1 - p_1)^2}{2b} - F_1 \geq 0 && (1) \\
& \frac{(a_2 - p_2)^2}{2b} - F_2 \geq 0 && (2) \\
& \frac{(a_1 - p_2)^2}{2b} - F_2 \leq \frac{(a_1 - p_1)^2}{2b} - F_1 && (3) \\
& \frac{(a_2 - p_1)^2}{2b} - F_1 \leq \frac{(a_2 - p_2)^2}{2b} - F_2 && (4)
\end{aligned}$$

Donde (1) y (2) son las restricciones de participación y (3) y (4) son las restricciones de autoselección.

Suponiendo que $a_1 > a_2$ entonces, intuitivamente, el monopolio debería extraerle todos los excedentes al grupo de más baja disposición a pagar y elevar su precio de modo de dejar, al grupo con más alta disposición a pagar, indiferente entre los dos planes. En general, no será posible extraer más excedentes del grupo de alta disposición a pagar sin que los miembros de este grupo elijan las tarifas del grupo con disposición a pagar más baja. En algún caso (que excluimos aquí) el monopolio podría optar por ofrecer un sólo contrato que excluya al grupo de disposición baja de modo de sólo servir al grupo con disposición a pagar más alta.

Luego, el lagrangeano del problema es:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= p_1\frac{a_1-p_1}{b}+p_2\frac{a_2-p_2}{b}-c\frac{a_1+a_2-p_1-p_2}{b}+F_1+F_2-\\ &\quad \lambda\left[F_2-\frac{(a_2-p_2)^2}{2b}\right]-\mu\left[\frac{(a_1-p_2)^2}{2b}-F_2-\frac{(a_1-p_1)^2}{2b}+F_1\right]\end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned}p_1: &\quad a_1-2p_1+c-\mu(a_1-p_1)=0\\ F_1: &\quad 1-\mu=0\\ p_2: &\quad a_2-2p_2+c-\lambda(a_2-p_2)+\mu(a_1-p_2)=0\\ F_2: &\quad 1-\lambda+\mu=0\end{aligned}$$

Las CPO's para $F_1$ y $F_2$ implican $\mu=1$, $\lambda=2$. Reemplazando en la condición para $p_1$:

$$a_1-2p_1+c-a_1+p_1=0$$

o bien: $p_1=c$.
Reemplazando en la condición para $p_2$:

$$a_2-2p_2+c-2a_2+2p_2+a_1-p_2=0$$

o bien: $c+(a_1-a_2)=p_2$.
Luego:

$$\begin{aligned}F_1 &= \frac{1}{2b}\left\{a_1^2+c^2+4a_2(a_2-a_1)\right\}\\ p_1 &= c\\ F_2 &= \frac{(2a_2-a_1-c)^2}{2b}\\ p_2 &= c+(a_1-a_2)\end{aligned}$$

4. (25 %) Suponga que Juan y Julián son dos amigos que comparten un departamento. Tanto Juan como Julián consumen dos bienes: cigarrillos $c$ y un bien compuesto $x$ cuyo precio normalizamos a 1.

   A Juan le molesta el humo de los cigarrillos de Julián y viceversa, de modo que, la utilidad del individuo $i$ es:
   $$U(c_i,x_i;c_j)=c_i^{1/2}x_i^{1/2}-\alpha_i c_j^{1/2} \quad i=1,2$$

   El ingreso del individuo $i$ es $w_i$.

   *a*) Encuentre los consumos de ambos bienes para Juan y Julián. ¿Qué utilidad obtiene cada uno?

   **Respuesta:** El problema del consumidor individual es:

$$\begin{aligned}\max_{c_i,x_i} &\quad c_i^{1/2}x_i^{1/2}-\alpha_i c_j^{1/2}\\ \text{s.a.} &\\ &\quad pc_i+x_i=w_i\end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden de este problema son:

$$c_i : \qquad \frac{x_i^{1/2}}{2c_i^{1/2}} = \lambda p$$

$$x_i : \qquad \frac{c_i^{1/2}}{2x_i^{1/2}} = \lambda$$

que conducen a:

$$\frac{x_i}{c_i} = p$$

Con lo que los consumos óptimos son:

$$c_i = \frac{w_i}{2p} \qquad x_i = \frac{w_i}{2}$$

La utilidad de cada uno:

$$u_i = \left\{ \frac{w_i}{2} - \alpha_i \left( \frac{w_j}{2} \right)^{1/2} \right\} \frac{1}{\sqrt{p}}$$

*b*) Argumente que el equilibrio anterior no es óptimo social. Encuentre el óptimo social, ¿Cuántos cigarrillos consume cada uno? ¿Qué utilidad obtiene cada uno?

**Respuesta:** Dado que hay un efecto externo (el ingreso del segundo individuo entra directamente en la función de utilidad indirecta del primero) este resultado no puede ser óptimo desde el punto de vista social mientras el individuo no internalice este efecto. Un planificador social benevolente (PSB) resuelve el siguiente problema[3]:

$$\max_{c_1, c_2, x_1, x_2} \quad c_1^{1/2} x_1^{1/2} - \alpha_1 c_2^{1/2} + c_2^{1/2} x_2^{1/2} - \alpha_2 c_1^{1/2}$$

$$\text{s.a.}$$

$$pc_1 + x_1 \leq w_1$$
$$pc_2 + x_2 \leq w_2$$

Las condiciones de primer orden, son:

$$c_1 : \frac{x_1^{1/2} - \alpha_2}{2c_1^{1/2}} = \lambda p$$

$$c_2 : \frac{x_2^{1/2} - \alpha_1}{2c_2^{1/2}} = \lambda p$$

$$x_1 : \frac{c_1^{1/2}}{2x_1^{1/2}} = \lambda$$

$$x_2 : \frac{c_2^{1/2}}{2x_2^{1/2}} = \lambda$$

De la condición para $c_1$ y $x_1$ se obtiene:

$$\frac{x_1 - \alpha_2 x_1^{1/2}}{c_1} = p$$

[3] Notar que el PSB, en general <u>no</u> realiza redistribuciones de ingreso.

Que, en la restricción presupuestaria, implica:

$$2x_1 - \alpha_2 x_1^{1/2} - w_1 = 0$$

De donde se obtiene:

$$x_1^{1/2} = \frac{\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 + 8w_1}}{4}$$

O bien:

$$x_1^s = \frac{w_1}{2} + \alpha_2 \frac{\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 + 8w_1}}{8}$$

Y, por lo tanto:

$$c_1^s = \frac{w_1}{2p} - \alpha_2 \frac{\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 + 8w_1}}{8p}$$

Simétricamente:

$$x_2^s = \frac{w_2}{2} + \alpha_1 \frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + 8w_2}}{8}$$

$$c_2^s = \frac{w_2}{2p} - \alpha_1 \frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + 8w_2}}{8p}$$

Como $x_{(\cdot)}^s > x_{(\cdot)}$ se deduce que ambos fuman menos que en el caso del equilibrio privado. Además, obtienen mayor utilidad.

*c*) Juan, que estudió algo de economía, propone a Julián generar derechos transables para poder fumar en el departamento. ¿Cuántos derechos deberían generar?

**Respuesta:** Suponiendo un derecho transable por cigarrillo, el óptimo es que se creen:

$$c_1^s + c_2^s = \frac{w_1 + w_2}{2p} - \alpha_2 \frac{\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 + 8w_1}}{8p} - \alpha_1 \frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + 8w_2}}{8p}$$

Derechos transables.

*d*) Suponga que se generan los derechos transables necesarios. Juan recibe una fracción $\beta$ de los derechos y luego negocian entre sí. ¿Qué cantidad de derechos deberían quedar en poder de cada uno? ¿Cuál es el precio de equilibrio de un derecho transable? ¿Depende este precio de $\beta$?

**Respuesta:** Luego de las transacciones, deberían quedar $c_1^s$ derechos transables en poder del consumidor 1 y $c_2^s$ derechos en poder del consumidor 2. El precio de equilibrio de un derecho será exactamente igual al beneficio marginal social del uso de dicho derecho, dado por:

$$\frac{x_1^{1/2} - \alpha_2}{2c_1^{s\,1/2}} = \frac{x_2^{1/2} - \alpha_1}{2c_2^{s\,1/2}} = \lambda p$$

Ya que el consumidor tiene que estar indiferente entre fumarse el último cigarrillo y no hacerlo, es decir, entre tener el último derecho o no tenerlo.

Finalmente, es obvio que este precio *no* puede depender de $\beta$.

5. (25 %) Un monopolista opera en un mercado con función de demanda inversa dada por $p(q)$. El monopolista hace dos elecciones: (1) Cuánto invertir en reducir sus costos $I$ y (2) Cuánto producir $q$. Si el monopolista invierte $I$ en reducción de costos, su costo marginal (constante) es igual a $c(I)$ con $c'(\cdot) < 0$ y $c''(\cdot) > 0$. Asuma, a lo largo de todo el problema, que la función objetivo del monopolista es cóncava en $q$ e $I$.

   *a*) Plantee el problema del monopolista. Encuentre las condiciones de primer orden e interprételas.

   **Respuesta:** El problema que resuelve el monopolista es:

$$\max_{I,q} \qquad p(q)q - C(I)q - I$$

   Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} I: &\qquad -C'(I)q = 1 \\ q: &\qquad p(q) + qp'(q) - C(I) = 0 \end{aligned}$$

   La primera condición establece que la disminución marginal de costos totales ($C'(I)q$) debe igualar al costo de realizarla (en este caso, 1). La segunda condición de primer orden es la clásica solución de monopolio: El costo marginal debe ser igual al ingreso marginal.

   *b*) Compare las elecciones del monopolista con las que haría un planificador social benevolente que puede controlar tanto $I$ como $q$ (una comparación de *primero mejor*).

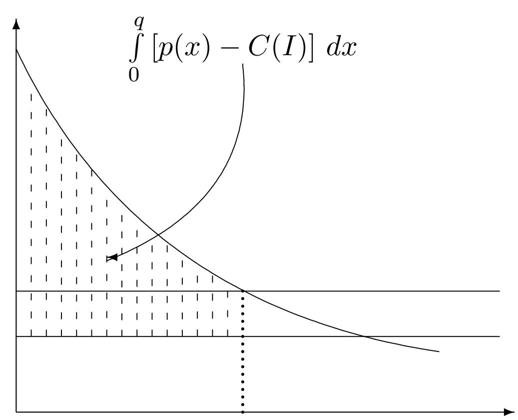


Figura 2: Problema 5, Excedentes totales, dado el nivel de inversión

   **Respuesta:** Un planificador social benevolente, resolvería el siguiente problema (ver figura 2):

$$\max_{I,q} \qquad \int_0^q [p(x) - C(I)]\, dx - I$$

   Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} I: &\qquad -C'(I)q = 1 \\ q: &\qquad p(q) - C(I) = 0 \end{aligned}$$

La primera condición es, como se observa, *exactamente la misma* que la que elige el monopolio. Este no es un resultado demasiado sorprendente: un monopolio siempre trata de maximizar el tamaño de la torta antes de adueñársela. Sin embargo, dado que los niveles de producción son distintos, la inversión del monopolio será, menor que la socialmente óptima.

La segunda condición de primer orden es el óptimo desde el punto de vista social: el precio debe igualar al costo marginal.

Notar que, al igual que en los problemas 3. y 4., al planificador social benevolente no le importa el tema de la redistribución aunque esta es muy importante a la hora de implementar la regulación: si se sigue la regla impuesta por el PSB, el monopolio quebraría, es necesario redistribuir riqueza de los consumidores al monopolio.

*c*) Compare las elecciones del monopolista con las que haría un planificador social benevolente que puede controlar $I$ pero no $q$ (una comparación de *segundo mejor*). Suponga que primero el planificador social elige $I$ y luego el monopolista elige $q$.

**Respuesta:** En este caso, el monopolista resuelve, en la segunda etapa, el siguiente problema:

$$\max_{q} \qquad p(q)q - C(I)q - I$$

La condición de primer orden es:

$$p'(q)q + p(q) = C(I)$$

Es decir, la condición de costo marginal igual al ingreso marginal. Llamando $q_m(I)$ a la solución del monopolio, el PSB resolverá:

$$\max_{I} \int_{0}^{q_m(I)} [p(x) - C(I)] \, dx - I$$

La condición de primer orden (que se complica algo ya que $q_m$ es una función de $I$) es:

$$p(q_m)q_m' - C'q_m - Cq_m' - 1 = 0$$

Donde $q_m$ es la producción del monopolio como función de la inversión $q_m' = \frac{dq_m(I)}{dI}$ y $C' = \frac{dC(I)}{dI}$.

Reordenando:

$$-C'q_m = 1 - \{p(q_m) - C\}\, q_m'$$

Ahora bien, de la condición de primer orden del monopolio:

$$p(q_m)'q_m + p(q_m) = C$$

Diferenciando absolutamente con respecto a $I$, se obtiene:

$$p(q_m)''q_m'q_m + p(q_m)'q_m' + p(q_m)'q_m' = C'$$

Luego:

$$q_m' = \frac{C'}{p(q_m)''q_m + 2p(q_m)'}$$

Notando que $C' < 0$ tenemos que, siempre que el ingreso del monopolio sea cóncavo en $q_m$ (i.e. $p''(q_m)q_m + 2p'(q_m) < 0$) entonces $-C'q_m < 1$ lo que implica que el PSB decide invertir más que en el caso monopólico puro, para forzar al monopolio a producir más en el equilibrio. Sin embargo, esta inversión aún es menor que en el *first best* por cuanto el nivel de producción final es menor y la inversión es costosa.