Equilibrio General

1. Introducción

Con anterioridad estudiamos el comportamiento tanto de las familias como de las firmas. También examinamos la naturaleza del equilibrio en mercados perfectamente competitivos. Resta, sin embargo, considerar un aspecto de gran relevancia.[1] El análisis suponía que las familias y las empresas realizan sus planes tomando los precios como datos. ¿Cómo podemos estar seguros que existe un conjunto de precios tal que los planes de los distintos agentes son compatibles? O dicho de otro modo ¿Qué seguridad tenemos de que todos los mercados estén simultáneamente en equilibrio? De existir, llamaremos Equilibrio General (EG) a la lista de precios que compatibiliza los planes de todos los agentes.

La cuestión de la existencia de un EG en una economía privada competitiva es de gran relevancia teórica. En efecto, se requiere demostrar su existencia para asegurar la consistencia de toda la teoría microeconómica. En caso de no existir un equilibrio general, entonces los equilibrios parciales en mercados individuales no podrán satisfacerse en forma conjunta. Asimismo, los planes optimizantes de los agentes no pueden ser todos realizados al mismo tiempo. Por lo tanto, de no existir EG, sería necesario repensar toda la teoría microeconómica.

El concepto de EG es también de enorme trascendencia práctica. El análisis de mercados individuales lleva en ocasiones a conclusiones erróneas. Por ejemplo, consideremos cuál es el impacto de un alza en el precio del salitre sobre la siembra de trigo. Si pensamos que el salitre es un insumo en la producción de trigo entonces podríamos postular que su producción disminuye cuando el precio del salitre sube. Sin embargo, un alza en el precio del salitre tiene un efecto mayor sobre otros cultivos que son más intensivos en su uso, produciéndose una sustitución en la siembra de dichos cultivos por trigo. Existen estudios econométricos que muestran la superficie sembrada con trigo aumenta con el precio del salitre. También son comunes los errores al analizar la política comercial de un país, no siempre se entiende que al proteger un sector productivo, no sólo se afecta a los consumidores de ese bien, sino que también a los otros sectores productivos.

En parte por lo expresado en el párrafo anterior ha surgido unas línea de trabajo cuyo propósito es desarrollar modelos de equilibrio general que puedan ser resueltos con el fin de analizar el impacto de distintas políticas tales como aperturas comerciales, reformas tributarias y normas ambientales.

[1] Existe equilibrio en un mercado competitivo particular cuando los deseos de vendedores y compradores son compatibles. En el análisis de equilibrio parcial se utilizan curvas de oferta y demanda que mantienen los precios de los demás bienes constantes.

2. Economías de Intercambio

Consideremos inicialmente, por facilidad en el tratamiento, un caso muy simple, aunque poco realista. Se trata de una economía en la cual no hay producción y la disponibilidad de bienes está fija. Todos los agentes de está economía son consumidores, y están provistos de una dotación inicial de bienes. En consecuencia, la única actividad en esta economía es el intercambio de bienes entre consumidores --razón por la cual se la denomina economía de intercambio.

El funcionamiento de una economía de intercambio donde se transan n bienes podemos resumirlo del siguiente modo. La familia h, provista de una dotación inicial de bienes w^h, enfrenta un vector de precios p, y elige una canasta de consumo x^h que maximiza su función de utilidad sujeto a su restricción presupuestaria, la cual podemos escribir:

$$px^h = pw^h$$

La demanda de la familia h por el bien i,[2] que denotaremos $d_i^h(p)$, surge de la maximización de utilidades que ésta realiza. Si las funciones de demanda se derivan de preferencias estrictamente convexas, entonces éstas están bien definidas, son continuas, y homogéneas de grado cero. En lo que sigue supondremos que las funciones de demanda poseen esas propiedades. Sumando las demandas de todas las familias obtenemos la demanda agregada de cada bien, que denotamos

$$D_i(p) = \Sigma_h d_i^h(p) \qquad i = 1,.....,n.$$

Dado que se trata de una economía de intercambio, la oferta de cada bien está fija, siendo igual a $W_i = \Sigma_h w^h_i$. Definimos luego las funciones de exceso de demanda como:

$$Z_i(p) = D_i(p) – W_i \qquad i = 1,.....,n.$$

Notar que las funciones de exceso de demanda son homogéneas de grado cero y continuas, además cumplen la llamada ley de Walras.

Ley de Walras: $\Sigma_i^n p_i Z_i(p) \equiv 0$

La ley de Walras es una identidad que se obtiene sumando las restricciones presupuestarias de todas las familias. Una consecuencia directa de la ley de Walras es que si (n-1) mercados están en equilibrio, el n-ésimo mercado también lo está.

Corolario Si todos los mercados menos uno están en equilibrio, y el mercado restante tiene un precio positivo, entonces ese mercado también está en equilibrio. Además, la homogeneidad de grado cero en precios una vez más implica que sólo precios relativos pueden ser determinados.

[2] Dado que las dotaciones iniciales de bienes permanecen constantes podemos suprimirlas como argumentos de las funciones de demanda

¿Como podríamos formalizar la definición de Equilibrio General? Una posibilidad es la siguiente. Equilibrio General es un vector de precios p tal que todos los mercados están en equilibrio, es decir, $Z_i(p) = 0$, $i= 1,....., n$. Esta definición tiene un problema: elimina la posibilidad de que existan bienes libres, es decir, bienes para los cuales el precio es cero ($p_i = 0$) al mismo tiempo que existe exceso de oferta. Por la razón anterior modificamos la definición de Equilibrio General por la de un vector p, de precios no negativos, para el cual se tiene

$$Z_i(p) \leq 0 \qquad i = 1, ..., n$$

Veamos que la definición anterior es apropiada. Es inmediato verificar que si el precio del bien es positivo ($p_i > 0$), entonces $Z_i(p) = 0$. En efecto, por ley de Walras

$$\sum_i^n p_i Z(p_i) = 0$$

Dejemos sólo los índices i para los cuales $p_i > 0$, entonces todos los $Z_i(p)$ necesariamente son iguales a cero, pues en caso contrario no se cumpliría la Ley de Walras. Además, si en equilibrio existe exceso de oferta para algún bien, entonces es un bien libre. Es decir, si $Z_i(p) < 0$, entonces $p_i = 0$. En efecto, si p^* es un EG, $Z(p^*) \leq 0$ y por lo tanto $p^*_j Z_j(p^*) \leq 0$. Si $Z_j(p) < 0$ y $p^*_j > 0$ entonces tendríamos $p^* Z(p^*) < 0$ lo que contradice la ley de Walras.

Ej.: Consideremos una economía de intercambio de dos individuos y dos bienes. Entonces podemos representarla a través de una caja de Edgeworth.

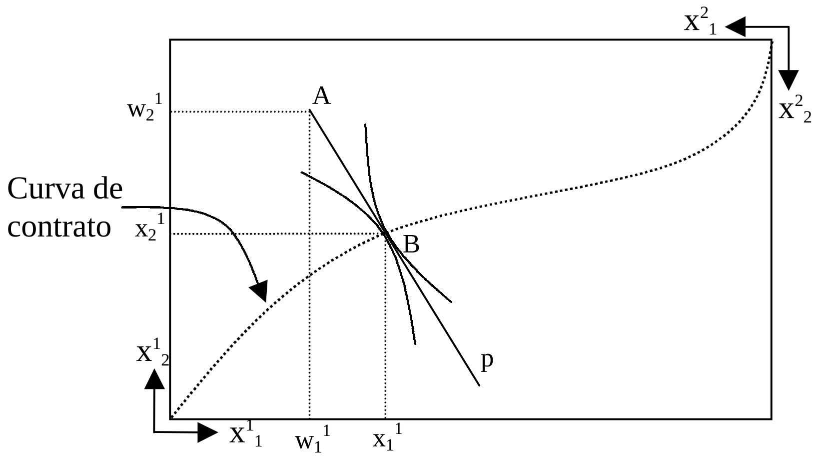


Figura 1: Caja de Edgeworth

donde x^i_j denota el consumo del bien j por parte del individuo i. Supongamos que A representa la dotación inicial de recursos de los individuos y que éstos se comportan como tomadores de precios. Entonces un equilibrio general está dado por el vector de precios p. Además las nuevas canastas de los consumidores están representadas por el punto B. Notar que la pendiente p de la recta que une los puntos Ay B representa el equilibrio general (precio del bien 1 en términos del bien 2). En efecto dado ese precio, cuando el individuo 1 consume la canasta x^1 está maximizando su utilidad dada su restricción presupuestaria (notar que $px^1=pw^1$).

2.1. Existencia

En el caso en que la economía tiene sólo dos bienes es posible demostrar que existe un equilibrio general en forma muy intuitiva. Para ello debemos suponer que al menos una persona tiene preferencias monótonas, lo que elimina la posibilidad de que existan bienes libres.

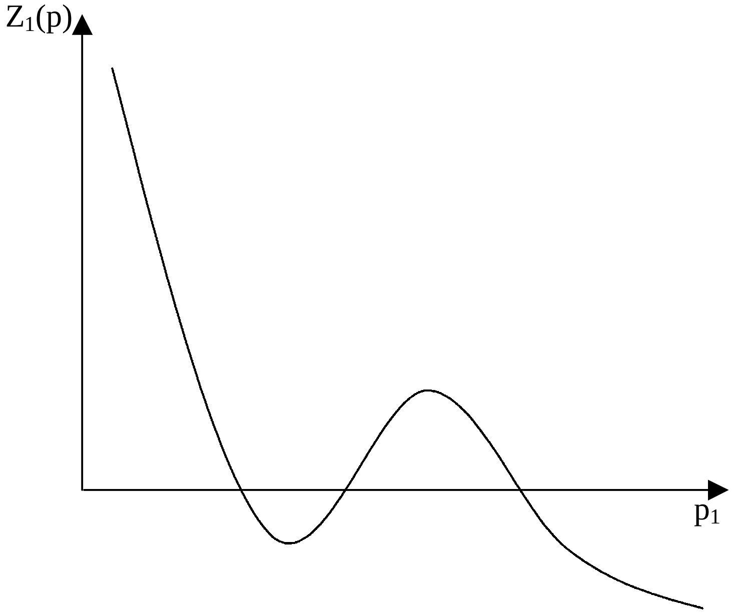


Figura 2: Existencia del Equilibrio General

Prop..: Si en una economía de dos bienes ninguno de ellos es libre, entonces existe al menos un equilibrio general.

Dem.: Por ley de Walras si un mercado está en equilibrio, entonces la economía está en equilibrio. Cuando el precio del bien 1 tiende a cero, $Z_1(p)$ toma un valor positivo, pues en caso contrario se trataría de un bien libre. Cuando el precio relativo del bien 2 tiende a 0, $Z_2(p)$ toma un valor positivo, y por ende $Z_1(p)$ toma un valor negativo, como se observa la figura..

En lo que sigue consideramos el caso general en el cual puede existir más de dos bienes. La ley de Walras reduce el número de ecuaciones linealmente independientes. En consecuencia, habrían n incógnitas (los precios correspondientes a los n mercados) y sólo (n-1) ecuaciones linealmente independientes. Sin embargo, dado que las funciones de exceso de demanda son homogéneas de grado cero, podemos fijar un precio (o combinación lineal de precios) igual a 1, es decir, elegir un bien como numerario, con lo cual el número de incógnitas se reduce a (n-1).

Luego el número de ecuaciones linealmente independientes es igual al número de incógnitas, pero esto no es suficiente para demostrar existencia. Además, no basta con probar la existencia de una solución al sistema de ecuaciones, pues para que ésta tenga interpretación económica sus componentes deben ser números reales no negativos.

Def.: Sea F( ) una función de un conjunto S en si mismo. Un elemento x^* en S se llama punto fijo de F si y sólo si $F(x^*) = x^*$.

Teorema: (Browers) Cualquier función continua, de un conjunto compacto y convexo en si mismo tiene al menos un punto fijo.

Dem: Restringimos la demostración de este resultado al caso en que S es un subconjunto de R, lo que nos da una buena intuición de la demostración general. Sin pérdida de generalidad supongamos que F es una aplicación continua del conjunto cerrado [0, 1] en si mismo, y definamos la función $h(x) = F(x) - x$. La función h es continua y además cumple $h(0) \geq 0$, y $h(1) \leq 0$. Luego por teorema del valor medio se tiene que existe x^* tal que $h(x^*) = 0$, es decir tal que $F(x^*) = x^*$.

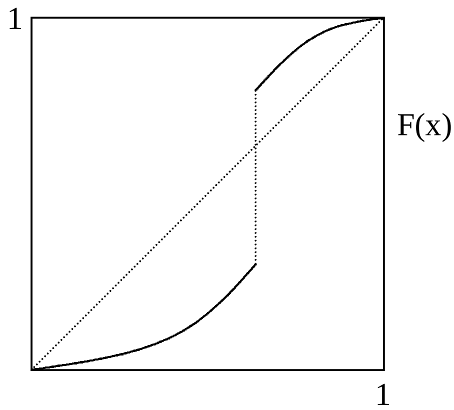


Figura 3: Necesidad de la continuidad de F(x)

De la figura anterior se desprende que es absolutamente necesaria la condición de continuidad de la función F para asegurar la existencia de un punto fijo. Los dos ejemplos siguientes muestran que la condición que el conjunto S sea compacto también es indispensable. Consideremos la aplicación $x \to (x+1)/2$, definido en el conjunto abierto (0, 1), no es difícil comprobar que esta aplicación no tiene punto fijo. La aplicación $x \to x+1$, definida en el conjunto cerrado no acotado $[0,\infty)$ tampoco tiene punto fijo.

Def.: Llamaremos simplex al conjunto

$$S = \{p \mid p \geq 0, \Sigma_i p_i = 1\}$$

Buscamos una aplicación continua del simplex en si mismo. Consideremos la función g definida por

$$g_i(p) = p_i + Z_i(p) \qquad \text{i} = 1,\ldots,\text{n}$$

Dado que las funciones Z son continuas, g es continua, pero no aplica al simplex en sí mismo. Para aplicar el simplex en si mismo definimos

$$g_i(p) = \frac{p_i + max(0, Z_i(p))}{1 + \sum_j max(0, Z_j(p))} \qquad \text{i} \quad = 1,\ldots,\text{n}$$

que es una aplicación continua de S en S.

<u>Teorema</u>: Si una función Z: S $\rightarrow$ S es continua y satisface la ley de Walras, entonces existe p^* en S tal que $Z(p^*) \leq 0$.

<u>Dem</u>.: Por teorema de Browers existirá un vector de precios p^* tal que $g_i(p^*) = p^*_i$, i =1,...n, es decir

$$p_i^+ = \frac{p_i^+ + max(0, Z_i(p^+))}{1 + \sum_j max(0, Z_j(p^+))}$$

Desarrollando la igualdad anterior se llega:

$$p_i^+ \sum_j max(0, Z_j(p^+)) = max(0, Z_i(p^+))$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por Z_i (p*) se obtiene

$$p_i^+ Z_i(p^+) \sum_j max(0, Z_j(p^+)) = Z_i(p^+) max(0, Z_i(p^+))$$

sumando sobre el índice i,

$$\sum_j max(0, Z_j(p^+)) \sum_i p_i^+ Z_i(p^+) = \sum_i Z_i(p^+) max(0, Z_i(p^+))$$

usando la Ley de Walras se concluye que $Z_i(p^*) \leq 0$, i = 1, ..., n.

La demostración anterior tiene una limitación: requiere que la funciones de demanda sean continuas en todo S, incluyendo los bordes. Normalmente las funciones de exceso de demanda se hacen infinitas para precios iguales a cero. La demostración se puede modificar para incluir el caso en que las demandas se hagan infinitas en los bordes del simplex S [ver por ejemplo Arrow y Hahn (1971)].

La condición más restrictiva para demostrar existencia es que las preferencias de las personas sean estrictamente convexas, la que se requiere para demostrar que las funciones de demanda son continuas. Sin embargo, sólo se requiere que las demandas agregadas sean continuas, y la agregación de demandas no continuas puede ser continua. Por ejemplo, la demanda de autos de una familia es discontinua, pero la demanda por autos de todo el país puede ser una variable continua.

2.2. Estabilidad

Una vez que se ha demostrado que existe EG es importante preguntarse si la economía está inicialmente en desequilibrio ¿cuáles son las fuerzas que la llevan al equilibrio? Una respuesta posible es el Martillero Walrasiano (tatônment) propuesto por Walras en 1874. La idea es que el martillero anuncia un listado de precios. Luego todos los agentes de la economía dan a conocer sus ofertas y demandas para ese sistema de precios. Con esta información el martillero calcula y examina el vector de demandas netas agregadas. Si existe exceso de demanda para un bien entonces sube su precio, por el contrario si existe exceso de oferta baja el precio. El martillero repite este proceso hasta que no existe exceso de demanda en ningún mercado. Formalmente escribimos el proceso de ajuste como sigue:

$$p_i(t+1) = p_i(t) + G_i(Z_i(p(t))), \qquad i = 1,........,n.$$

donde los G_i son funciones monótonas. Los pasos del tatonnment no deben ser interpretados como sucesivos cambios en el mercado, pues para que los agentes puedan tomar sus decisiones los mercados deben estar en equilibrio. Más bien se trata de un proceso de prueba y error que realiza el martillero en un tiempo mínimo para determinar el equilibrio.

Por lo general los precios se cambian en forma proporcional al exceso de oferta o demanda, con lo cual

$$p(t+1) = p(t) + \alpha\, Z(p_t)$$

donde α es un número entre 0 y 1. Este último proceso de tatônment tiene una propiedad muy conveniente. En efecto

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i (p_i(t))^2\right) = 2 \sum_i p_i(t)\frac{dp_i(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i (p_i(t))^2\right) = 2 \sum_i p_i(t) Z_i(p(t)) = 0$$

por lo que los precios están restringidos a una esfera centrada en el origen, lo cual permite una elegante representación del proceso de ajuste de precios para el caso n = 3, pues conjuntamente se tiene que $\Sigma\, p_i^2 = c$ y $p\, Z(p) = 0$.

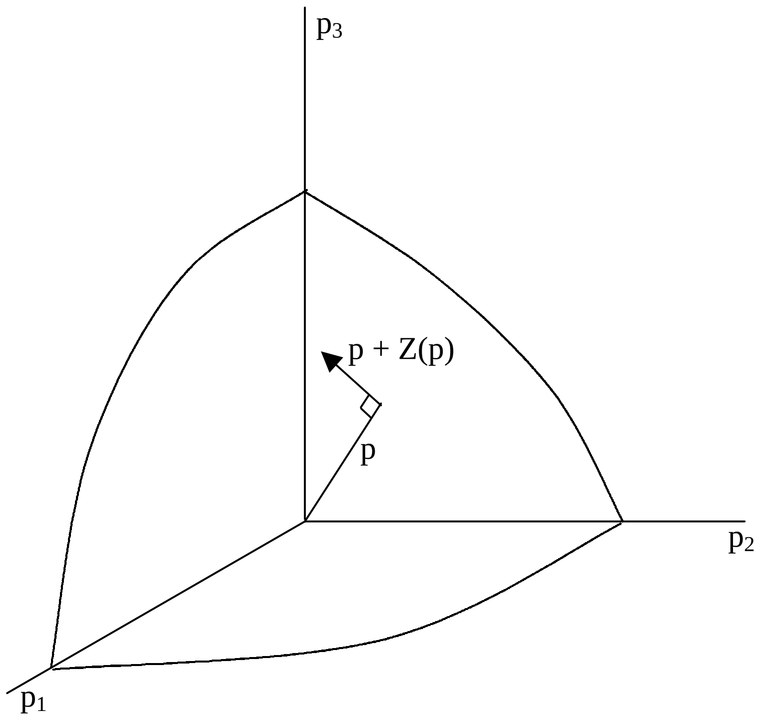


Figura 4: Proceso de tatônment.

Ej.: Sea una economía de dos consumidores cuyas respectivas funciones de utilidad y dotaciones iniciales de recursos son:

$u(x_1, x_2) = x_1 (x_2)^2 \qquad w^1 = (1, 0)$

$u(x_1, x_2) = (x_1)^2 x_2 \qquad w^2 = (0, 1)$

En la siguiente tabla se especifican las demandas de ambos consumidores:

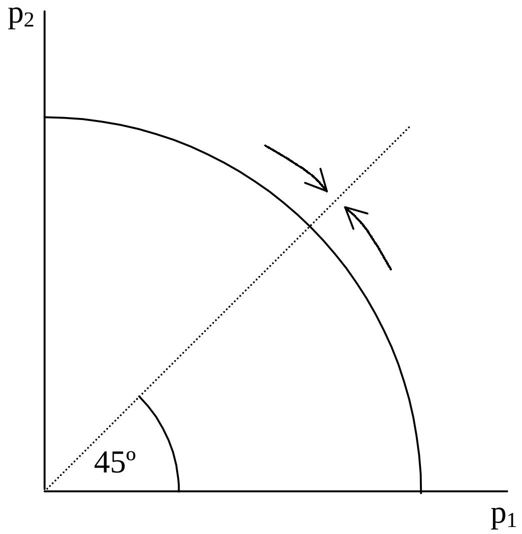
	Ingreso	demanda de x_1	demanda de x_2
Cons. 1	p_1	1/3	$2/3\ p_1/p_2$
Cons. 2	p_2	$2/3\ p_2/p_1$	1/3

En consecuencia las funciones de exceso de demanda son:

$$\frac{dp_1}{dt} = Z_1(p) = -\frac{2}{3} + \frac{2\ p_2}{3\ p_1}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = Z_2(p) = -\frac{2}{3} + \frac{2\ p_1}{3\ p_2}$$

Notar que en este ejemplo la solución es $p_1=p_2$. Además, cuando p_1 es mayor que p_2, $Z_1(p) < 0$, y $Z_2(p) > 0$. Por el contrario cuando p_2 es mayor que p_1, $Z_1(p) > 0$ y $Z_2(p) < 0$.



Luego, en este ejemplo el mecanismo de ajuste de precios es estable. Sin embargo, este proceso de ajuste no es siempre lo es, el primer ejemplo en el cual no es estable fue dado por Scarf (1959).

Ej.: Considere una economía de tres bienes y tres consumidores. Los consumidores están caracterizados por las siguientes funciones de utilidad y dotaciones iniciales de recursos:

$u^1 = \min[x_1, x_2] \qquad w^1 = (1, 0, 0)$

$u^2 = \min[x_2, x_3] \qquad w^2 = (0, 1, 0)$

$u^3 = \min[x_1, x_3] \qquad w^3 = (0, 0, 1)$

Dado un vector de precios p, el ingreso del primer consumidor es p_1, por lo que su demanda está dada por:

$$x^1 = \left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_1}{p_1 + p_2}, 0 \right)$$

En forma análoga se tiene que:

$$x^2 = \left(0, \frac{p_2}{p_2 + p_3}, \frac{p_2}{p_2 + p_3}\right)$$

$$x^3 = \left(\frac{p_3}{p_1 + p_3}, 0, \frac{p_3}{p_1 + p_3}\right)$$

Estas funciones de demanda nos permiten derivar las funciones de exceso de demanda y el mecanismo de ajuste de precios.

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{p_1}{p_1 + p_2} + \frac{p_3}{p_1 + p_3} - 1$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{p_1}{p_1 + p_2} + \frac{p_2}{p_2 + p_3} - 1$$

$$\frac{dp_3}{dt} = \frac{p_2}{p_3 + p_2} + \frac{p_3}{p_1 + p_3} - 1$$

No es difícil verificar que $dp_1/dt = dp_2/dt = dp_3/dt = 0$ en $p^* = (1,1,1)$, el cual además es un equilibrio competitivo. A continuación mostraremos que cuando la lista inicial de precios p es distinta de p^*, entonces el sistema no converge a p^*. Hemos visto que la suma $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ permanece constante. Además probaremos que la expresión $p_1p_2p_3$ no cambia a lo largo del tiempo. En efecto:

$$\frac{d(p_1 p_2 p_3)}{dt} = p_2 p_3 \frac{dp_1}{dt} + p_1 p_3 \frac{dp_2}{dt} + p_1 p_2 \frac{dp_3}{dt}$$

$$\frac{d(p_1 p_2 p_3)}{dt} = p_2 p_3 \left(\frac{p_1}{p_1 + p_2} + \frac{p_3}{p_1 + p_3} - 1\right) + p_1 p_3 \left(\frac{p_1}{p_1 + p_2} + \frac{p_2}{p_2 + p_3} - 1\right) + p_1 p_2 \left(\frac{p_3}{p_2 + p_3} + \frac{p_2}{p_2 + p_3} - 1\right)$$

$$\frac{d(p_1 p_2 p_3)}{dt} = p_1 \frac{p_2 p_3 + p_1 p_3}{p_1 + p_2} + p_3 \frac{p_2 p_3 + p_1 p_2}{p_1 + p_3} + p_2 \frac{p_1 p_3 + p_1 p_2}{p_2 + p_3} - p_1 p_2 - p_1 p_3 - p_2 p_3$$

$$\frac{d(p_1 p_2 p_3)}{dt} = p_1 p_3 + p_2 p_3 + p_1 p_2 - p_1 p_2 - p_1 p_3 - p_2 p_3 = 0$$

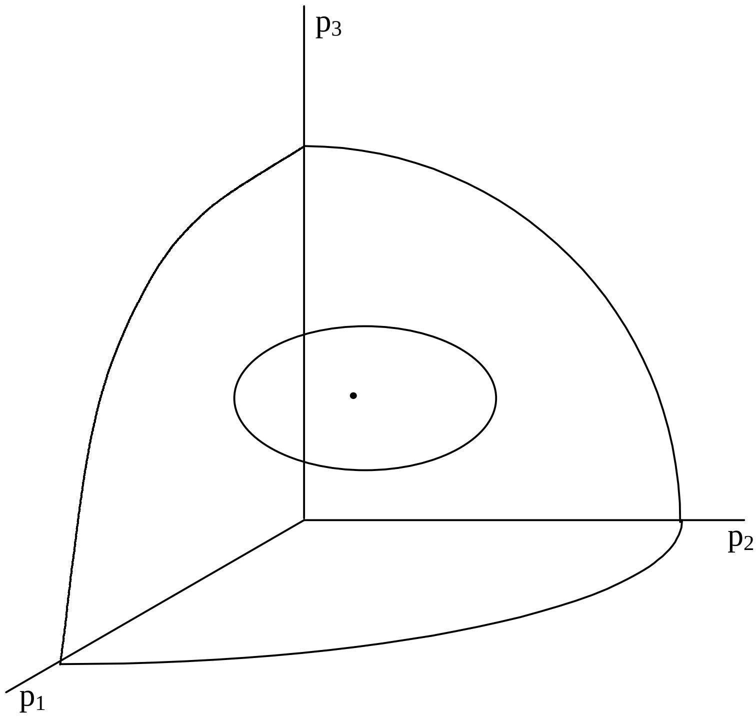


Figura 5: Contraejemplo de Scarf

La primera condición ($p_1^2+p_2^2+p_3^2$ constante a lo largo del tiempo) restringe la trayectoria de los precios a estar en una esfera centrada en el origen. La segunda condición ($p_1p_2p_3$ constante a lo largo del tiempo) restringe la trayectoria de los precios a estar en un hiperboloide simétrico. Por lo que los precios deberán moverse dentro de la intersección de ambas figuras, de donde se sigue que si los precios iniciales difieren de p^*, el mecanismo de ajuste Walrasiano nunca alcanzará p^*.

<u>Def</u>.: Dado un vector de precios p, 2 bienes, i y j, se dicen sustitutos brutos si

$$\frac{\partial Z_i(p)}{\partial p_j} > 0$$

Se puede demostrar que en una economía de intercambio donde todos los bienes son sustitutos brutos entre sí, el mecanismo de ajuste tatônment es estable.

2.3. <u>Unicidad del Equilibrio</u>.

Consideremos una economía de intercambio de dos bienes y dos consumidores que podemos representar con un diagrama de Edgeworth.

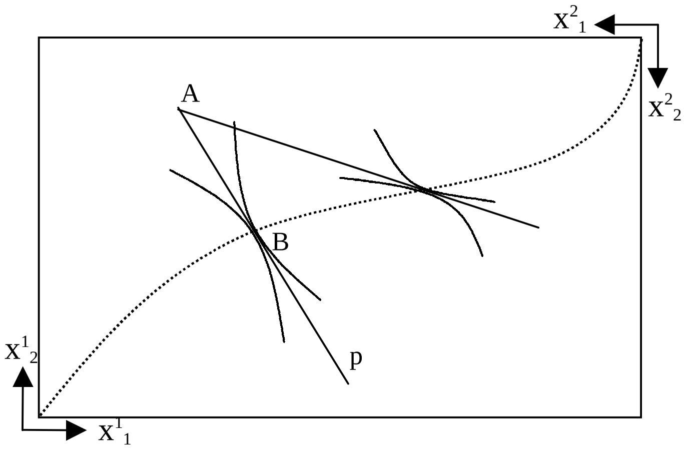


Figura 6: Multiplicidad de Equilibrios Generales

donde x^i_j denota el consumo del bien j por parte del individuo i. La figura ilustra la posibilidad que para una dotación inicial de recursos pueden haber múltiples equilibrios competitivos. Esta posibilidad está dada en la figura, donde dos equilibrios, B y C, corresponden a la misma dotación inicial de recursos A. La facilidad para dibujar múltiples equilibrios nos ilustra que la no-unicidad es la regla en vez de la excepción.[3]

En general no existe ninguna razón para que exista un único equilibrio, hay por lo tanto que imponer restricciones para asegurar unicidad. Comenzamos estudiando las condiciones que se requieren para que los equilibrios sean localmente únicos.

Def..: Un EG p es regular si la matriz de n-1 por n-1 que resulta de eliminar la última columna y la última fila del Jacobiano de Z(p) (DZ(p)) es no singular. Si todo equilibrio general p es regular, entonces la economía se dice regular.

Prop. : En toda economía regular los equilibrios generales son localmente únicos, es decir, para cada equilibrio general p existe un $\varepsilon > 0$, tal que si $p' \neq p$ y la distancia entre p y p' es menor a ε, entonces $Z(p') \neq 0$.

Dem.: La demostración es intuitiva. Llamemos $\hat{p}$ al vector de precios excluído el último elemento y $\hat{Z}(p)$ al vector de excesos de demanda excluidos el último elemento. Si $D\hat{Z}(p)$ es no singular, entondes $D\hat{Z}(p)d\hat{p}$ es no nulo para cualquier desplazamiento $d\hat{p}$ distinto de cero.

Notar que los equilibrios generales están aislados entre sí. Un conjunto cuyos puntos están aislados se dice discreto. Luego el conjunto de equilibrios generales de una economía regular es discreto.

---

[3] El hecho que la no-unicidad no es la exepción nos obliga a preguntarnos a que EG llega la economía.

El resultado anterior podemos ilustrarlo para una economía de 2 bienes: para cada equilibrio p $\partial Z_1(p)/\partial p_1 \neq 0$, por lo que en un entorno de p, Z_1(p) es distinto de cero, como se observa en el siguiente gráfico.

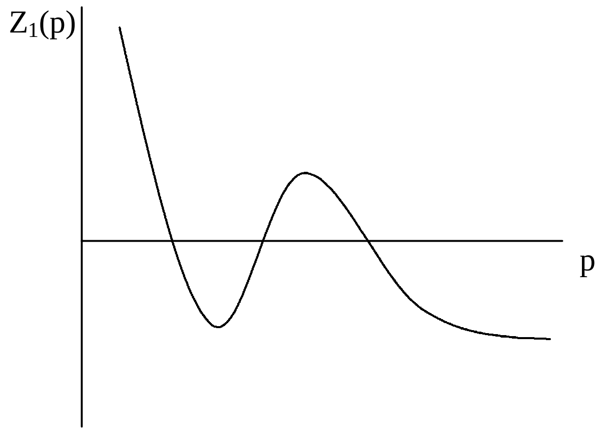


Figura 7: Economía regular

En economías regulares pequeños cambios en los parámetros no producen grandes modificaciones en los equilibrios. Pequeñas perturbaciones no producen grandes saltos en los equilibrios como ocurre en los dos ejemplos siguientes de economías no regulares.

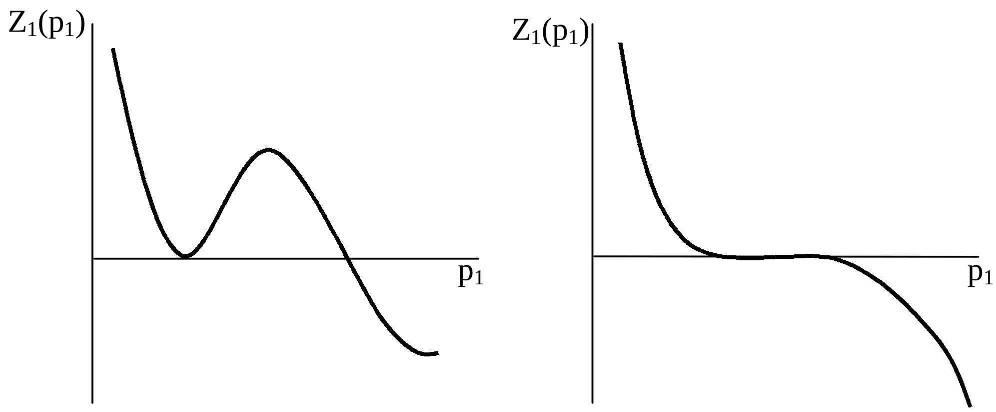


Figura 8: Economías no regulares

Por otro lado, de los dos ejemplos anteriores se desprende que las economías no-regulares tienen una baja probabilidad de ocurrir, pues una pequeña perturbación las transforma en economías regulares.

<u>Prop</u>. : En toda economía regular con preferencias son monótonas el número de EG es finito.

Dem.: Por ser Z(p) una función continua, el conjunto de los equilibrios generales es un cerrado. Además la monotonía en las preferencias implica que el conjunto es cerrado. Ningun precio puede ser muy grande, porque ello implicaría que el precio relativo de los otros bienes es cercano a cero. Pero dado que las preferencias son monótonas, el precio de ningún bien puede tender a cero. Por ser una economía regular, el conjunto de los equilibrios generales es discreto. En estas condiciones el número elementos es finito.[4]

Prop..: Suponga que se cumplen las condiciones anteriores, si la matriz de n-1 por n-1 que resulta de eliminar la última columna y la última fila del Jacobiano de Z tiene determinante negativo, entonces el equilibrio es único.

Dem.: La restringimos al caso de una economía de 2 bienes. Por ley de Walras si un mercado está en equilibrio, entonces la economía está en equilibrio. Cuando el precio del bien 1 tiende a cero, $Z_1(p)$ toma un valor positivo. Cuando el precio relativo del bien 2 tiende a 0, $Z_2(p)$ toma un valor positivo, y por ende $Z_1(p)$ toma un valor negativo, como se observa en el siguiente gráfico.

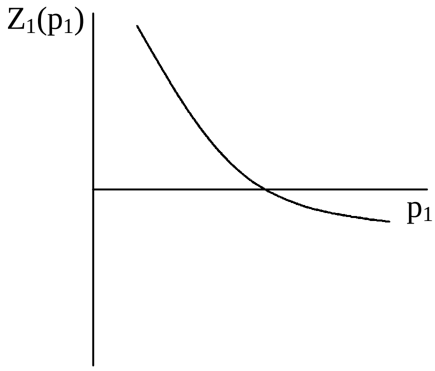


Figura 9: Unicidad del Equilibrio General.

Luego si $\partial Z_1(p)/\partial p_1 \leq 0$ en todo punto, entonces existe un único equilibrio. Una condición alternativa de unicidad es la siguiente:

Prop.: Si cualquier par de bienes son sustitutos brutos para todos los precios, entonces existe un único EG p^*.

Dem.: Supongamos que q es otro vector de precios de equilibrio. Dado que $p^* > 0$ se puede definir $m = \max (q_i/p_i^*)$. Por homogeneidad de la función Z se tiene

$$Z(p^*) = Z(mp^*) = 0$$

[4] Mostramos intuitivamente que un conjunto compacto y discreto tiene un número finito de elementos. Si un conjunto discreto tuviese un numero infinito de elementos entonces se puedo construir una sucesion de puntos. Por la compacidad del conjunto esta sucesion tendria un punto de acumulacion en el propio conjunto. Luego se ha construido un punto en el conjunto tal que, cada vez que se toma una bola en torno a el hay una infinidad de puntos distintos. Luego ese punto no puede ser aislado y entonces contradice el hecho que el conjunto es discreto. Luego un conjunto compacto y discreto no puede tener un número infinito de elementos.

Suponga que la expresión q_i/p_i^* alcanza su máximo en el índice k, es decir $m = q_k/p_k^*$. Reduciendo todos los precios distintos a k desde mp^*_i a q_i, se disminuye la demanda por el bien k, por lo tanto $Z_k(q) > 0$. Lo que contradice la condición de precio de equilibrio de q. En consecuencia, existe un único equilibrio.

3. Modelo con Producción.

3.1. Producción con retornos decrecientes a escala

En esta sección estudiamos la existencia de equilibrio general en el caso con producción con retornos decrecientes a escala. Suponemos que existen J firmas, cada una de las cuales está caracterizada por un conjunto de producciones posibles que designamos Y_j, j = 1, ..., J. Un elemento de Y_j será un plan de producción determinado, y lo denotaremos y_j. Los elementos positivos de y_j representan productos y los negativos insumos.

Supondremos que las firmas son tomadoras de precios y que maximizan beneficios. Dado el vector de precios p, la expresión $y_j(p)$ denotará el plan de producción que maximiza el beneficio de la firma j. Para asegurar la existencia de un único plan de producción que maximiza beneficios para cada vector de precios, suponemos que los conjuntos Y_j son acotados, cerrados y estrictamente convexos. Estos supuestos implican tener retornos decrecientes a escalas. Otros modelos no requieren condiciones tan restrictivas, pero el análisis es más complejo.

Prop.: Si el conjunto de producciones posibles es acotado, cerrado y estrictamente convexo, entonces la función $y_j(p)$ está bien definida y es continua.

> Dem: El producto py es una función continua, y el conjunto Y_j es un compacto por lo tanto la función py_j tiene al menos un máximo en el conjunto Y_j. Veamos que existe un solo máximo. La demostración es por contradicción, por lo cual suponemos que existen dos máximos y^* e y', respectivamente. Por ser Y_j estrictamente convexo, $\lambda y^* + (1 - \lambda)y'$ está en el interior de Y_j, luego existe un $\delta > 1$ tal que $\delta(\lambda y^* + (1 - \lambda)y')$ también está en Y_j, y además,
>
> $$p\delta(\lambda y^* + (1 - \lambda)y') > py^* = py'$$
>
> lo cual contradice el supuesto inicial de que y^* e y' maximizan la expresión py. Luego existe un único máximo, lo que a su vez implica que la función $y_j(p)$ está bien definida.
>
> Sólo falta ver que es una función continua. En lo que resta de la demostración por simplicidad notacional se omite el subíndice j. Sea $\{p^k\}_k$ una secuencia que converge a p^0. Para probar continuidad debemos demostrar que la secuencia $\{y(p^k)\}_k$ converge a $y(p^0)$. La secuencia $\{y(p^k)\}_k$ está contenida en el compacto Y_j, por lo cual existe una

subsecuencia que converge a algún punto y^*. Por ello es necesario probar que $y^* = y(p^0)$. Supongamos que

$$p^0y^* < p^0y(p^0)$$

luego si p^k está suficientemente cerca de p^0, e $y(p^k)$ cerca de y^*

$$p^ky(p^k) < p^ky(p^0)$$

lo que contradice el hecho que $y(p^k)$ maximiza beneficios en p^k. Luego $p^0y^* = p^0y(p^0)$. Pero dado que hay un solo y que maximiza a p^0y, $y^* = y(p^0)$, lo cual completa la demostración.

Se define la oferta agregada como

$$Y(p) = \Sigma_j y_j(p)$$

Esta representación supone que no existen externalidades, pues si existiesen la función de producción de una firma dependería de la producción de las restantes firmas. En rigor, para nuestros propósitos basta con suponer que la función de oferta agregada Y(p) es continua, y no es necesario que cada $y_j(p)$ lo sea.

Comportamiento del Consumidor.

En este aspecto realizamos 2 extensiones con respecto al modelo de intercambio. Primero, algunos de los bienes son a la vez factores productivos y bienes finales, por ejemplo el tiempo de cada individuo es un factor productivo (trabajo) y también un bien final (ocio). Segundo, el ingreso de los individuos incluye la distribución de las utilidades de las firmas. En efecto, las familias son las dueñas de las firmas. Las firmas reparten todas sus utilidades (si es que tienen) a los dueños en proporción a su participación en la propiedad. Las familias anticipan ese pago y lo incluyen en su ingreso.[5] Sea T^h_j la fracción de la firma j que posee la familia h, luego $\Sigma_h T^h_j = 1$. En consecuencia, la restricción presupuestaria del h-ésimo consumidor es

$$px^h = pw^h + \Sigma_j T^h_j \, py_j(p)$$

El problema de cada familia, entonces, consiste en maximizar su utilidad $u_h(x^h)$, sujeto a la restricción presupuestaria anterior. La solución de este problema es la función de demanda de la familia, que denotaremos $d^h(p)$, la que es continua cuando las preferencias de la familia son estrictamente convexas.

[5] En nuestro análisis no hay incertidumbre, dados los precios, las familias y las firmas calculan las utilidades que esperan tener, las familias también determinan lo que esperan recibir de la venta de factores. Esas expectativas se cumplen en el equilibrio, donde todos los planes son mutuamente compatibles.

Funciones de exceso de demanda. La función de demanda agregada está dada por

$$D(p) = \Sigma_h d^h(p)$$

Además la dotación inicial de recursos de la economía es igual a $W = \Sigma_h w^h$, por lo que los excesos de demanda están representados por

$$Z(p) = D(p) - Y(p) - W$$

Dado los supuestos realizados, es fácil verificar que Z(p) es una función continua y homogénea de grado cero. Sólo falta probar que satisface la ley de Walras. La Ley de Walras en este caso dice que el valor total de los excesos de demanda, sumado sobre las firmas y las familias, es cero. La ley de Walras se demuestra observando la restricción presupuestaria de las familias. La cantidad que cada familia gana (incluyendo la participación en las utilidades de las firmas) debe ser igual a lo que espera gastar.

Prop.: La función Z(p) antes definida satisface la Ley de Walras, es decir para cualquier vector de precios p se tiene que pZ(p) = 0.

Dem.: $pZ(p) = p\,[D(p) - Y(p) - W]$

$$pZ(p) = p\,[\Sigma_h d^h(p) - \Sigma_j y_j(p) - \Sigma_h w^h]$$

$$pZ(p) = p\,[\sum_h d^h(p) - \sum_h \sum_j T_j^h\, y_j(p) - \sum_h w^h]$$

$$= \sum_h p[d^h(p) - \sum_j T_j^h\, y_j(p) - w^h] = 0$$

Dado que Z(p) es una función continua, homogénea de grado cero, que satisface la Ley de Walras podemos asegurar la existencia de equilibrio Walrasiano, es decir de un vector de precios p^* para el cual $Z(p^*) \leq 0$.

3.2. Equilibrio General con Análisis de Actividades.

En esta subsección consideramos una economía con funciones de producción de Leontieff. Existen por lo tanto retornos constantes a escala. En Análisis de Actividades las posibilidades productivas de la economía están caracterizadas por una matriz, que llamaremos A, la cual resume el conocimiento tecnológico

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{k1} \\ 0 & & 0 & a_{12} & & a_{k2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & -1 & a_{1n} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}$$

Cada una de las n filas de la matriz A representa un bien y cada columna un proceso o actividad. Si el elemento a_{ik} es positivo entonces quiere decir que el proceso k produce el bien i, si a_{ik} es negativo entonces el bien i es un insumo del proceso k. La matriz nos indica la existencia de K procesos productivos diferentes. Las n primeras columnas corresponden al supuesto de disponibilidad sin costo. En lo que sigue el vector y denotará los niveles de las diversas actividades. Luego y_k representa el nivel de la actividad k.

Mantenemos la notación de la sección anterior, y definimos la demanda neta V(p) = D(p) - W. Si la función de demanda es continua y homogénea de grado cero, entonces la demanda neta tiene las mismas propiedades. El equilibrio Walrasiano involucra un sistema de precios p, y niveles de actividades y tales que

(1) V(p) = Ay

(2) $\Sigma_i p_i a_{ik} \leq 0$ (con igualdad si $y_k > 0$), es decir, $pA \leq 0$, $pAy = 0$.

pues en equilibrio competitivo, cuando todos los costos han sido incluídos en el cálculo de los beneficios, éstos son iguales a cero para aquellas industrias con producción, pues si hay beneficios positivos, la producción aumenta al infinito. En este caso, donde las utilidades de las firmas son cero, la Ley de Walras es pV(p) = 0

Prop.: En una economía de Análisis de Actividades existe Equilibrio General

Dem: Se realiza una demostración constructiva que utiliza el Teorema de Browers. Por ello debemos encontrar una aplicación continua de un conjunto en si mismo. Definamos el conjunto C del siguiente modo:

$$C = \{ p \mid p_k \geq 0, \Sigma_k p_k = 1, pA \leq 0 \}$$

Consideremos la función que dado un punto p en C, proyecta la expresión p + V(p) en C. La función V(p) es continua, entonces falta por demostrar que su proyección en C es una función continua. La proyección de p + V(p) en C está dada por la solución p' del problema

$$\text{Min} \quad \Sigma_i (p'_i - p_i - V_i(p))^2$$

p'

<u>s.a</u> $\Sigma_i p'_i a_{ik} \leq 0,$ $k = 1,..., K$

$\Sigma_i p'_i = 1$

El Lagrangeano del problema anterior es

$$L = \Sigma_i (p'_i - p_i - V_i(p))^2 + \Sigma_k y_k (\Sigma_i p_{i'} a_{ik}) + \lambda(\Sigma_i p_{i'} - 1)$$

donde los y_k y λ son los multiplicadores de Lagrange. Las condiciones de Kuhn-Tucker son:

$$p'_i - p_i - V_i(p) + \Sigma_k y_k a_{ik} + \lambda \leq 0$$

Suponiendo que todos los precios son positivos, la proyección de p+V(p) sobre C está dada por:

$$p'_i = p_i + V_i(p) - \Sigma_k y_k a_{ik} - \lambda$$

La proyección es la solución de un problema de minimización de una función convexa definida sobre un conjunto compacto y convexo. Luego, por teorema del máximo la proyección es una función continua, es decir, la aplicación de C en C

$$p_i \rightarrow p_i + V_i(p) - \Sigma_k y_k a_{ik} - \lambda$$

es continua. Por teorema del Punto Fijo existe una solución $p'_i = p_i$, luego

$$V_i(p) = \Sigma_k a_{ik} y_k + \lambda$$

$$\Sigma_i p_i V_i(p) = \Sigma_i p_i \Sigma_k a_{ik} y_k + \lambda \Sigma_i p_i$$

reordenando términos,

$$\Sigma_i p_i V_i(p) = \Sigma_k y_k \Sigma_i a_{ik} p_k + \lambda \Sigma_i p_i$$

Dado que p está en C, se tiene que:

$$\Sigma_i p_i V_i(p) = \lambda$$

El lado izquierdo es cero por Ley de Walras. En consecuencia, $\lambda = 0$ y $V_i(p) = \Sigma_k a_{ik} y_k$. Luego hemos encontrado una solución (p, y) que cumple las condiciones de equilibrio general.

Podemos ilustrar con un gráfico el algoritmo para el caso en que hay tres bienes en la economía.

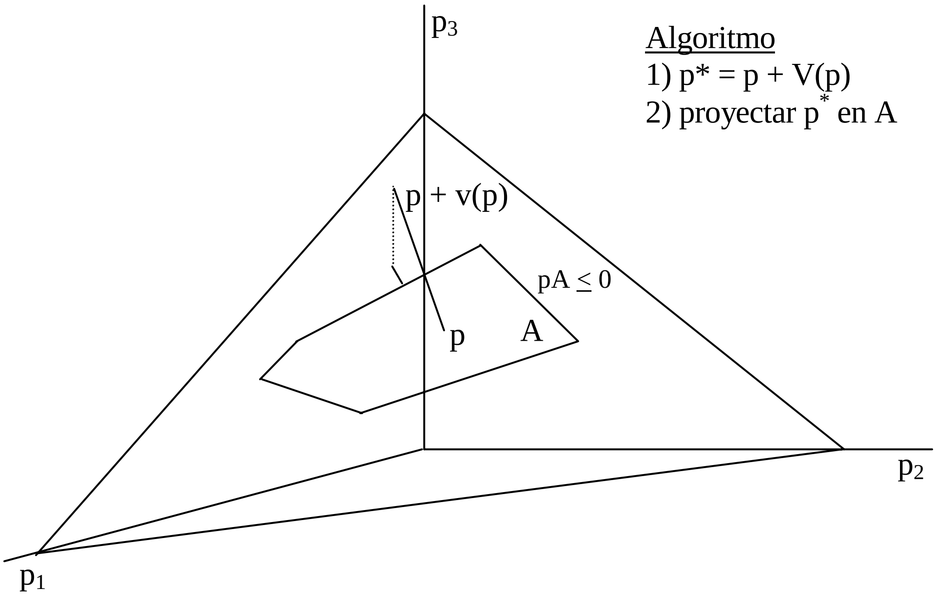


Figura 10: Algoritmo para el caso con 3 bienes.

Ejemplo: Considere una economía de tres 3 bienes. El primero es un bien de consumo (C), el segundo bien es trabajo (L), y el tercero es capital (K). Existe demanda final tanto por trabajo (ocio) como por capital (durables). El conocimiento tecnológico de la economía se resume en la siguiente matriz de Insumo-Producto:

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} -1 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -8 & -6 & -4 & -2{,}4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right|$$

En la economía existen dos tipos de consumidores, los cuales están caracterizados por una misma dotación inicial de recursos y preferencias. En cada grupo hay igual número de consumidores. Los recursos iniciales de los consumidores de cada grupo son:

		Factor		
		C	L	K
Individuo	1	0	10	8
	2	0	10	1

Las preferencias de cada consumidor están dadas por las siguientes funciones de demanda:

$$u_1 = C^{.25} L^{.10} K^{.65}$$

$$u_2 = C^{.60} L^{.20} K^{.20}$$

Dadas las funciones de demanda anteriores sabemos como distribuye el gasto de cada tipo de consumidor.

En este ejemplo los precios están totalmente determinados por el lado productivo de la economía, pues las dos actividades que producen cualquiera sea la demanda son:

$$\underline{\text{base}} \quad \begin{matrix} 4 & 0 \\ -8 & -2,4 \\ -1 & 1 \end{matrix}$$

Tomando el precio del trabajo como numerario ($p_L = 1$), de la segunda actividad en la base se deduce que el precio del capital es $p_K = 2,4$. Asimismo, de la primera actividad en la base se deduce que $p_C = (8 + 2,4)/4 = 2,6$. Podemos comprobar que estos precios son consistentes con la tecnología. En efecto, se verifica que la rentabilidad de las dos actividades que no están en la base es negativa:

$$10,4 - 6 - 4,8 < 0$$
$$10,4 - 4 – 7,2 < 0$$

Dados los precios anteriores el ingreso de cada tipo de consumidor es el siguiente:

$$I_1 = 10 + 19,2 = 29,2$$
$$I_2 = 10 + 2,4 = 12,4$$

y la canasta de cada grupo consumidor está dada por $x^1 = (2.8, 2.9, 7.9)$ y $x^2 = (2.9, 2.5, 1.0)$. En consecuencia el vector de demandas netas es igual a:

$$V(p) = \begin{matrix} 5,7 \\ 5,42 \\ 8,94 \end{matrix} - \begin{matrix} 0 \\ 20 \\ 9 \end{matrix}$$

En equilibrio general se tiene:

$$V(p) = \begin{matrix} 5,7 \\ -14,6 \\ -0,1 \end{matrix} = \begin{matrix} 4 & 0 \\ -8 & -2,4 \\ -1 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} y_1 \\ \\ y_2 \end{matrix}$$

Por lo tanto en equilibrio el nivel de actividad de cada sector es igual $y_1 = 1,425$, $y_2 = 1,358$.