5. El Núcleo

En las secciones anteriores hemos estudiado el equilibrio cuando todos los agentes económicos se comportan como tomadores de precios. Por ello, en lo que sigue describiremos el rango de posibilidades cuando existe un número reducido de agentes y éstos no se comportan como tomadores de precios. En general suponemos que los involucrados a través de negociaciones llegan a un acuerdo. El problema, como veremos, es que existen muchos acuerdos posibles. En esta sección se busca caracterizar el conjunto de los acuerdos posibles. Por simplicidad, sólo se trabaja con economías de intercambio.

Ejemplo 5.1. Consideremos una economía de intercambio de dos individuos y dos bienes. Entonces podemos representarla en una caja de Edgeworth.

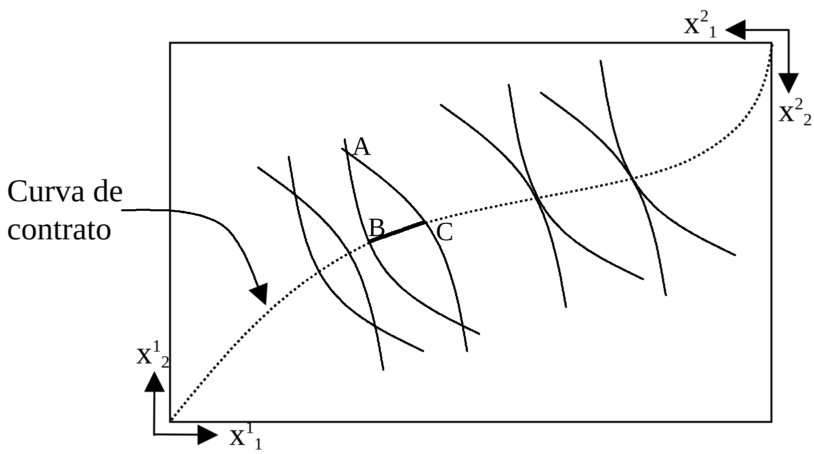

Figura 1: Caja de Edgeworth.

donde x^h_i denota el consumo del bien i del individuo h. Podemos suponer que la negociación se restringe a aquellos puntos que son eficientes en el sentido de Pareto. Centraremos, en consecuencia, nuestra atención en la curva de contrato, la cual contiene todos los puntos óptimos de Pareto. Supongamos que A representa la dotación inicial de recursos de los individuos, entonces la negociación puede llevar a cualquier punto de la curva de contrato entre B y C. En efecto, el individuo 1 rechazaría cualquier punto a la izquierda de B porque le supondría una pérdida de utilidad con respecto a A. Por la misma razón el individuo 2 rechazaría cualquier punto a la derecha de C. Por lo tanto, los acuerdos posibles se reducen a la curva de contrato entre los puntos B y C, y a esta parte se llama núcleo.

Def.: Se denomina asignación factible a un vector $x=(x^1, x^2, ..., x^H)$ tal que

$$\sum_{h=1}^{H} x^h = \sum_{h=1}^{H} w^h$$

donde x^h denota la canasta de consumo y w^h la dotación inicial de recursos, del individuo h, y H representa el número de individuos.

Def.: Dada una asignación $(x^1, ..., x^H)$, una coalición S bloquea esta asignación si existe y^h, para todo h en S tal que

(i) y^h es preferido a x^h, para cualquier h en S, con preferencia estricta para algún h.

(ii) $\Sigma_{h\varepsilon S}\, y^h = \Sigma_{h\varepsilon S} w^h$

Def.: Se llama núcleo al conjunto de las asignaciones que no puede ser bloqueada por ninguna coalición.

Prop.: Todo punto en el núcleo es óptimo de Pareto.

Dem.: Si un punto del núcleo no fuese óptimo de Pareto, entonces sería bloqueado por la coalición de todos los individuos.

Prop.: Los equilibrios generales, cuando existen, están en el núcleo.

Dem.: Sea p un equilibrio general con la correspondiente asignación factible $(x^1, ..., x^H)$ que no está en el núcleo, entonces existirá una coalición S tal que bloquea dicha asignación. Luego la coalición S puede entregar a cada individuo una canasta y^h que es preferida a x^h, con preferencia estricta para algún h. Por definición de equilibrio general, y suponiendo no-saturación local, se tendrá $py^h \geq px^h$, con desigualdad estricta por lo menos para un h, luego

$$\sum_{h\in S} py^h > \sum_{h\in S} px^h$$

lo que podemos reescribir,

$$\sum_i p_i \sum_{h\in S} y_i^h > \sum_i p_i \sum_{h\in S} x_i^h$$

lo que implica, dado que los precios son positivos, que para algún i se tiene:

$$\sum_{h\in S} y_i^h > \sum_{h\in S} x_i^h = \sum_{h\in S} w_i^h$$

Lo que contradice el supuesto inicial que la coalición S puede bloquear el equilibrio general.

<u>Conjetura de Edgeworth</u>: (1886). Cuando aumenta el número de individuos, el núcleo tiende a reducirse a los equilibrios competitivos.

La conjetura de Edgeworth hasta el momento sólo ha sido demostrada para economías replicables.

Def.: Se dice que una economía es replicable cuando existe un mismo número, q, de cada tipo de consumidor, donde cada tipo está caracterizado por una misma función de utilidad y dotación inicial de recursos.

Supongamos H tipos de consumidores y q consumidores de cada tipo. La expresión x^{hj} representa la canasta del j-ésimo consumidor tipo h y w^h la dotación de recursos del consumidor tipo h. Luego para que una asignación sea factible debe tenerse que:

$$\sum_h \sum_{j=1}^{q} x^{hj} = q \sum_h w^h$$

Prop.: En una economía replicable y con preferencias convexas todos los consumidores de un mismo tipo tienen el mismo nivel de utilidad.

Dem.: Supongamos que los individuos (h, 1) tienen las peores canastas (con peor estricto para al menos uno) de sus respectivos grupos. Entonces demos a cada uno de estos consumidores desfavorecidos la siguiente canasta:

$$y^{h1} = \Sigma_j \, x^{hj}/q$$

Notemos que:

$$\sum_{h=1}^{H} y^{h1} = \sum_{h=1}^{H} w^h$$

por lo que en conjunto podrán lograr dichas canastas. Además todos estarán mejor que antes pues hemos supuesto que x^{hj} es preferido a x^{h1} para todo j, entonces dado que las preferencias son convexas se tendrá que y^{h1} es preferido a x^{h1}. En resumen para cualquier asignación dada, los consumidores menos favorecidos de cada grupo en conjunto bloquean dicha asignación, por lo que en el núcleo sólo habrán asignaciones en las que todos los individuos de un mismo grupo tienen igual nivel de satisfacción.

Prop.: En una economía replicable y con preferencias estrictamente convexas, en el núcleo todos los consumidores de un mismo tipo tienen la misma canasta de consumo.

Dem.: Consideremos una asignación que está en el núcleo, y supongamos que dos individuos de un mismo grupo tienen distinta canasta de consumo, aunque deben tener igual utilidad. Consideremos que ambos consumidores deciden compartir en partes iguales ambas canastas. En consecuencia, ambos consumidores reciben una canasta que es una combinación líneal de las dos canastas anteriores. Luego por ser las preferencias estrictamente convexas, ambos consumidores prefieren la nueva canasta a la anterior, por lo que la asignación inicial no puede estar en el núcleo, contradiciendo el supuesto inicial. Por lo tanto, ambas canastas deben ser iguales.

Prop.: En una economía replicable con un infinito número de consumidores de cada tipo y preferencias estrictamente convexas, el núcleo es igual al conjunto de equilibrios competitivos.

Dem.: Haremos una demostración gráfica para lo cual supondremos que hay sólo dos tipos de bienes. Pero la demostración se puede generalizar a economías con cualquier número de bienes. Por simplicidad supondremos que hay tres tipos de consumidores. En lo que sigue x^h denotará la canasta del consumidor tipo h. Se gráfica en el espacio de los bienes a los puntos $(x^h - w^h)$, lo cual da forma a un triángulo que necesariamente contendrá al origen pues $\Sigma_h(x^h - w^h) = 0$.

Supongamos que x^1-w^1, x^2-w^2 y x^3-w^3 no están en una misma líea. Entoces la recta que une dos de dichos puntos, digamos x^1-w^1 y x^3-w^3, está por debajo del origen. Luego existirán dos canastas y^1 e y^3 estrictamente preferidas a x^1 y x^3, respectivamente, tales que la recta que que une y^1-w^1 y y^3-w^3 pasa por el origen. Ahora como en cada grupo existe un número infinito de personas es posible encontrar una coalición que bloquee la asignación inicial. Supongamos que estas canastas se pueden lograr a través de una coalición de dos consumidores tipo 1 y cinco consumidores tipo 3, es decir:

$$0 = 2(y^1 - w^1) + 5(y^3 - w^3)$$

Luego:

$$2w^1 + 5w^3 = 2y^1 + 5y^3$$

Entonces dos personas del grupo 1 y cinco personas del grupo 2 pueden bloquear el equilibrio que se representa en la figura siguiente. Luego, el cero no puede estar en el interior del casco convexo.

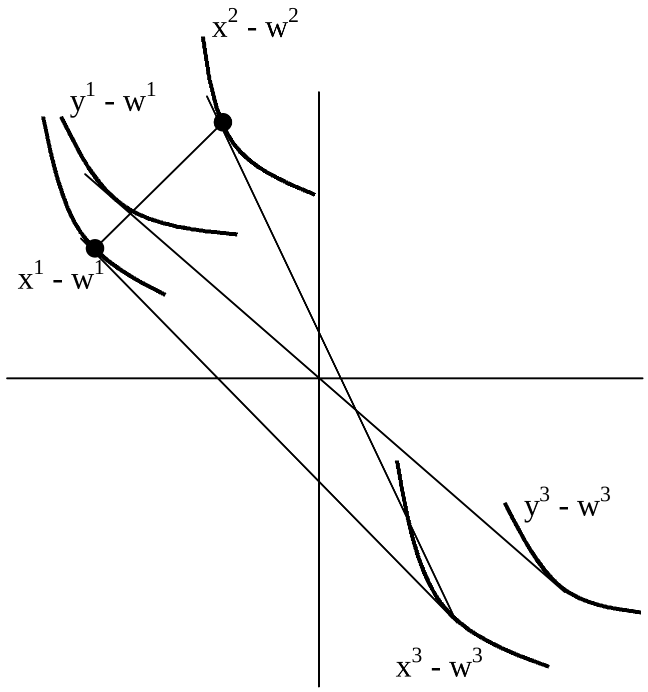

Figura 2: Casco convexo conteniendo al origen.

Luego deberá tenerse que tanto x^1-w^1, como x^2-w^2 y x^3-w^3 están en una misma línea, la cual pasa a través del origen.

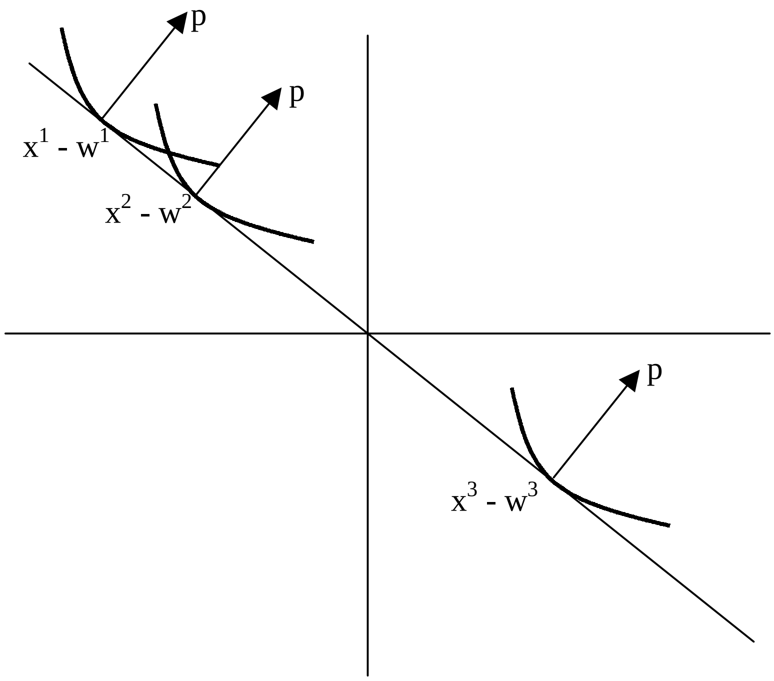

Figura 3: Equilibrio competitivo en una economía replicable.

La conjetura de Edgeworth en el caso de economías replicables establece que a medida que aumenta, el tamaño del núcleo se reduce como ilustramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.2: Considere una economía replicable en la cual existen dos bienes y dos tipos de consumidores, los cuales están caracterizados por las siguientes funciones de utilidad y dotaciones iniciales de recursos.

Consumidor 1	$u = (x_1x_2)^{½}$	$w^1 = (1,8)$
Consumidor 2	$u = (x_1x_2)^{½}$	$w^2 = (8,1)$

Es inmediato que en equilibrio competitivo $x^1 = (4.5, 4.5)$, $x^2 = (4.5, 4.5)$, y $u^1 = u^2 = 4.5$. En este ejemplo se tiene que la función de utilidad es homogénea de grado 1 e igual para todos los consumidores. Por esta razón se tiene que en un óptimo de Pareto la canasta de todos los consumidores tiene la misma composición relativa y además:

$$u^{11} + u^{12} + ... + u^{1q} + u^{21} + ... + u^{2q} = (9q9q)^{½} = 9q$$

donde u^{hj} representa la utilidad del j-ésimo consumidor tipo h, y q el número de consumidores de cada tipo. Ahora una coalición formada por todos los individuos, menos uno del tipo 2 puede obtener una "utilidad total" igual a:

$$[(9q - 8)(9q - 1)]^{½} = q[(9 - 8/q)(9 - 1/q)]^{½}$$

$$= q[(9 - 4,5/q)^2 - 12,3/q^2]^{½}$$

Si q es un número grande la expresión anterior la podemos aproximar por 9q - 4.5 - 6,2/q. Luego la coalición anterior bloquea cualquier asignación en la cual el solitario consumidor tipo 2 obtenga más de 9q - (9q - 4.5 - 6,2/q), por lo que

$$u^{2j} \leq 4.5 + 6,2/q$$

para cualquier j, del mismo modo:

$$u^{1j} \leq 4.5 + 6,2/q$$

luego cuando $q \to \infty$, $u^2 \to 4.5$ y $u^1 \to 4.5$. En consecuencia, cuando el núnero de consumidores es grande cada uno obtiene una utilidad de 4,5, lo que corresponde al equilibrio de competencia.

por lo que el núcleo se reduce al equilibrio competitivo, en el cual $px^1 = pw^1$, $px^2 = pw^2$, y $px^3 = pw^3$, donde p representa la pendiente de la recta perpendicular a aquella que pasa a través del origen.

Apéndice: Superficie de utilidades

En este apéndice se muestra la forma que tiene el núcleo en un ejemplo con tres bienes: previamente se introduce la idea de superficie de utilidades.

Def.: Se llama superficie de utilidades a la frontera del conjunto:

$$U = \{(u^1, u^2, ..., u^H) \mid u^h = u_h(x^h), h = 1,....H, \text{ x es cualquier asignación factible}\}$$

donde u^h denota la utilidad del individuo y $u_h(\ )$ la función de utilidad del individuo h..

Prop.: Si las funciones de utilidad $u_h(.)$ son cóncavas, entonces la superficie de utilidades es cóncava.

Dem.: Consideremos dos puntos, u y v en la superficie de utilidades. Luego existen dos asignaciones factibles, x e y, tales que $u^h=u_h(x^h)$ y $v^h=u_h(y^h)$ para h=1,...,H. Definamos la asignación factible $z^h=\alpha x^h+(1-\alpha)y^h$. Sea $\mu^h= u_h(z^h)$, luego por concavidad de las funciones de utilidad, $\mu^h\geq\alpha u^h+(1-\alpha)v^h$, h=1,...,H. Lo que demuestra que la recta que une u y v está por debajo de la superfice de utilidades.

La superficie de utilidades de una economía de tres consumidores, cada uno de los cuales está caracterizado por una función de utilidad cóncava y una dotación inicial de recursos fija, puede ser representada del modo presentado en la figura 3.

Prop.: Si las funciones de utilidad son todas iguales, cuasicóncavas y homogéneas de grado 1, entonces la superficie de utilidades es el plano

$$\sum_h u^h = u\left(\sum_h w^h\right)$$

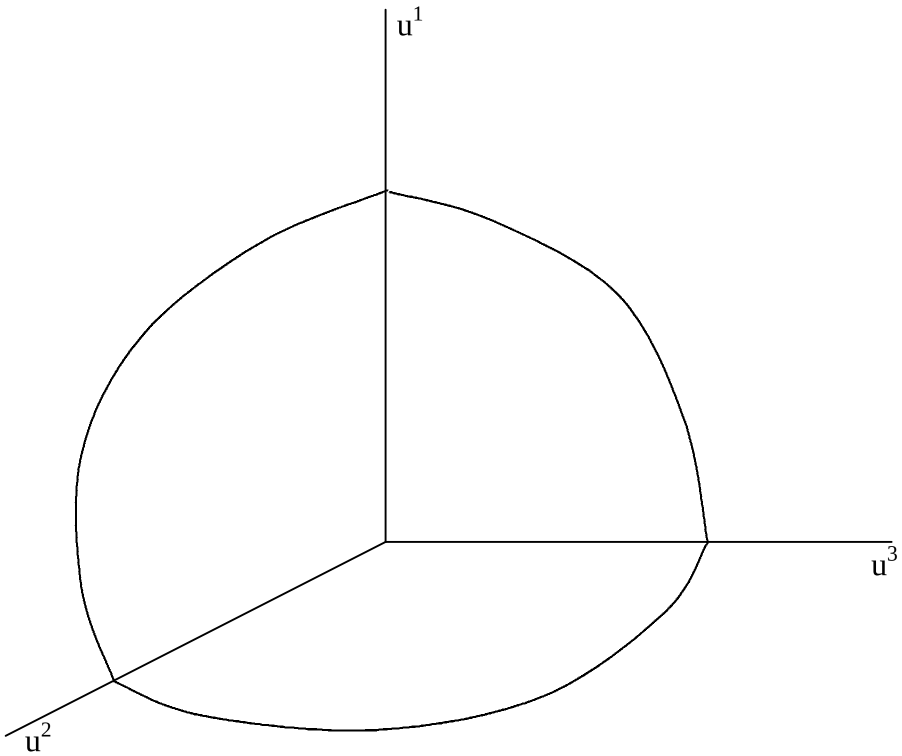

Figura 3: Superficie de utilidades.

Dem.: La demostración consta de dos partes. Primero se muestra que cualquier asignación factible da origen a un vector de utilidades individuales que está por debajo del plano anterior. Luego se prueba que cualquier punto en dicho plano existe al menos una asignación factible que permite alcanzarlo.

Sea $(x^1, x^2, ..., x^H)$ una asignación factible, entonces por concavidad de la función u,

$$u\left(\frac{1}{H}\sum_h x^h\right) \geq \frac{1}{H}\sum_h u(x^h)$$

Además por ser u homogénea de grado uno:

$$u\left(\sum_h x^h\right) \geq \sum_h u(x^h)$$

Luego para toda asignación factible se tiene:

$$u\left(\sum_h w^h\right) \geq \sum_h u(x^h)$$

Además probaremos que cualquier vector $(u^1, u^2, ..., u^H)$ que satisfaga

$$\sum_h u^h = u\left(\sum_h w^h\right)$$

está en la superficie de utilidades. En efecto, definamos $x^h = u^h W/u(W)$, lo que claramente representa una asignación factible. Se tiene además:

$$u(x^h) = u\left(\frac{u^h W}{u(W)}\right) = \frac{u^h u(W)}{u(W)} = u^h$$

lo que completa la demostración.

Ejemplo 5.3: Consideremos una economía de intercambio de dos bienes y tres individuos, todos los cuales tienen la misma función de utilidad cóncava y homogénea de grado uno:

$$u(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{½}$$

Se sabe además que la dotación inicial de recursos de cada individuo está dada por $w^1 = (1, 4)$, $w^2 = (4, 4)$, y $w^3 = (11, 1)$. Se puede probar que en equilibrio general es p = (3/8, 2/8). Con estos precios el vector de utilidades es u = (73/24, 100/24, 115/24).

Al igual que en el ejemplo 1 restringiremos nuestra atención a aquellos puntos que son óptimos de Pareto. Como la dotación total de recursos en la economía está dada por el par (16,9), los puntos que son óptimos de Pareto deben cumplir:

$$u^1 + u^2 + u^3 = u(16, 9) = 12$$

Ahora no cualquier vector (u^1, u^2, u^3) que cumpla la condición anterior es aceptable para todos los consumidores. El consumidor 1 puede obtener una utilidad igual a dos por si solo, por lo que bloquearía cualquier asignación que le reporte una utilidad inferior a dos. Del mismo modo, el consumidor 2 bloquearía cualquier combinación que le reporte una utilidad inferior a cuatro, y el consumidor 3 cualquier combinación que le reporte una utilidad inferior a 3,2. Además los consumidores 1 y 2 pueden conseguir en conjunto una utilidad $u^1 + u^2 = \sqrt{40} =$ 6,4, por lo que debe tenerse que $u_3 \leq 5{,}6$. De manera análoga podemos construir cotas superiores para u^1 y u^2.

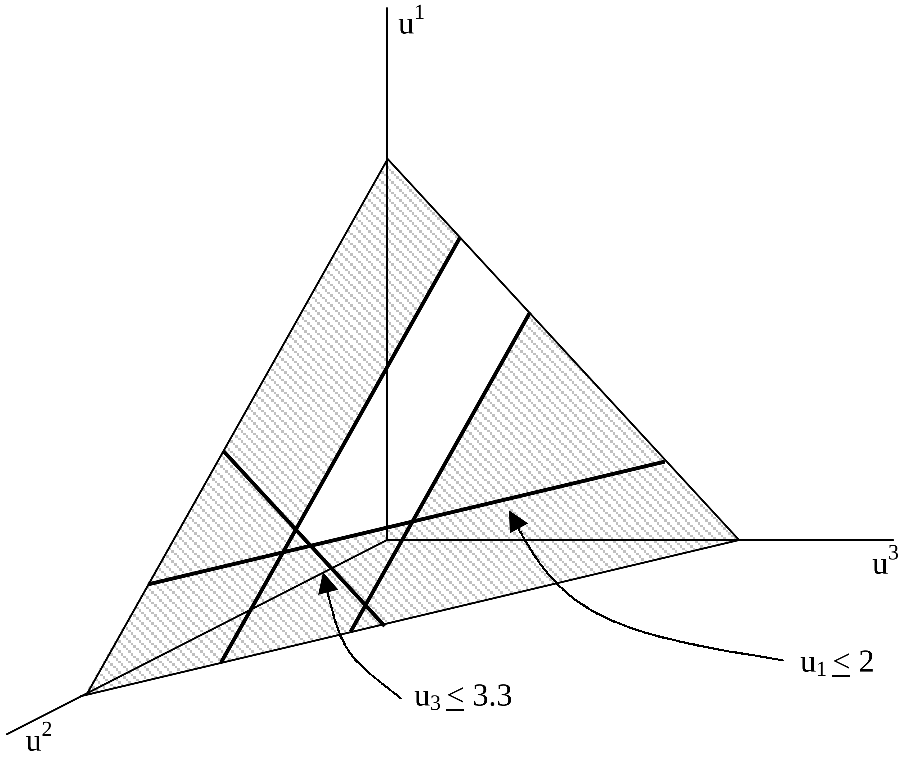

Figura 4: Cotas superiores e inferiores para la utilidad.