DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
U N I V E R S I D A D D E C H I L E

ECONOMÍA DE LA INCERTIDUMBRE Y LA INFORMACION

Pablo Serra

República 701, Casilla 2777, Santiago – Chile, Junio 1991.

ECONOMIA DE LA INCERTIDUMBRE Y LA INFORMACION

1. Introducción

El progreso explosivo en la economía de la incertidumbre y la información ha tenido éxito en analizar problemas previamente intratables tales como:

- seguros
- investigación y desarrollo
- propaganda
- especulación
- funcionamiento de los mercados financieros
- mercados de opciones y futuros

Se puede distinguir, aunque por cierto la distinción es algo artificial, entre Economía de la Incertidumbre y Economía de la Información. La primera supone una actitud pasiva frente a la incertidumbre en la cual el individuo se adapta a ésta. La segunda considera una posición activa, en la cual se busca reducir la incertidumbre a través de la información

2. Economía de la Incertidumbre

2.1 Conceptos Básicos

En la literatura existen dos enfoques para tratar la incertidumbre: (i) preferencias sobre contingencias inciertas, desarrollado por Von Neumann – Morgenstern (1944) y (ii) parámetros estadísticos, debido a H. Markowitz (1959). El segundo enfoque, muy usado en finanzas, se puede resumir en que los individuos prefieren mayor ingreso esperado pero menor varianza en el ingreso. James Tobin demostró que el enfoque más general de Von Neumann – Morgenstern se puede reducir al de preferencias sobre parámetros si se cumplen ciertas condiciones. Por ello, aquí se presenta el enfoque más general.

La incertidumbre puede referirse a eventos o mercados. Se habla de incertidumbre de mercado cuando cada individuo está cierto de sus recursos y oportunidades, pero está incierto acerca de la oferta y la demanda de los otros agentes económicos. El tratamiento explícito de las incertidumbres de mercado está produciendo un tratamiento más realista de las “imperfecciones de mercado”. En este apunte nos centraremos en la incertidumbre de eventos que es más fácil de tratar.

En toma de decisiones bajo incertidumbre el individuo elige entre diversas acciones, mientras la naturaleza “elige” entre estados. El problema de decisión del individuo requiere que éste especifique:

1. Un conjunto de acciones posibles.
2. Una distribución probabilística expresando las creencias del consumidor respecto a los estados de la naturaleza.
3. Una función de consecuencias mostrando los resultados bajo diferentes combinaciones de acciones y estados.
4. Una función de utilidad sobre las consecuencias.

En principio tanto los estados como las acciones pueden ser sobre un continuo, pero por simplicidad se supondrá una representación discreta.

<u>Ejemplo 1</u>: Consideremos un agricultor que debe decidir entre sembrar mucho (a=1) y sembrar poco (a=2). Los estados de la naturaleza son año seco (s=1) y año lluvioso (s=2). Si el agricultor siembra poco y el año es seco, entonces tiene ingresos c_{21}, si el año es lluvioso tiene ingresos mayores; c_{22}. Pero si siembra mucho y el año es lluvioso, entonces sus resultados c_{12} son aún mejores. Cuando siembra mucho y el año es seco se producen los peores resultados c_{11}.

		Estados		
		s=1	s=2	Utilidad de las acciones
Acciones	a=1	c_{11}	$c=_{12}$	u_1
	a=2	c_{21}	$c=_{22}$	u_2
Creencias acerca de los estados		π_1	π_2	

<u>Ejemplo 2</u>: Consideramos un jugador que tiene dos alternativas de juego. La primera lotería ofrece premios c_i, con probabilidades π_{1i}, i=1,2,3, respectivamente. La segunda lotería ofrece los mismos premios, pero con probabilidades π_{2i}, i=1,2,3.

		consecuencias			
		c_1	c_2	c_3	Util. acciones
Acciones	a=1	π_{11}	π_{12}	π_{13}	u_1
	a=2	π_{21}	π_{22}	π_{23}	u_2

<u>La función de probabilidad</u>. Supondremos que cada individuo es capaz de representar sus creencias con respecto a la ocurrencia de cada estado de la naturaleza a través de una distribución de probabilidad “subjetiva”. Es decir asigna a cada estado de la naturaleza un número que está entre 0 y 1, cuya suma total es 1.

<u>La función de Utilidad y la Regla de la Utilidad Esperada</u>. En la teoría de las decisiones bajo incertidumbre, utilidad es un índice de las preferencias asignadas

tanto a las consecuencias como a las acciones. Distinguimos las 2 usando diferentes notaciones. El problema es derivar una función de utilidad sobre acciones a partir de las preferencias sobre consecuencias.

Sea una acción “a” cuyas consecuencias son c_1,....., c_n, con probabilidades π_1,.....,π_n respectivamente, entonces la conexión entre la ordenación de acciones y las preferencias sobre consecuencias está dada por la “regla de utilidad esperada” de V.N.-M si se tiene que:

$$u(a) = p_1 v(c_1) + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + p_n v(c_n)$$

Es decir la utilidad de cada acción, u(a), es la esperanza matemática de las utilidades de las consecuencias asociadas a la acción La “regla de la utilidad esperada” permite al individuo ordenar las acciones posibles, es decir, asignar una función de utilidad sobre las acciones de modo de determinar la preferida. ¿Cuál es la justificación de esta regla? En lo que sigue mostramos que si las preferencias del individuo sobre el conjunto A de loterías cumple ciertos axiomas, entonces existe una función de utilidad, salvo transformaciones afines, que representa dichas preferencias, y además ésta cumple la regla de la utilidad esperada.

La regla de la utilidad esperada parece razonable. Como ocurre sólo una de las consecuencias posible, parece razonable que la utilidad asociada a cada consecuencia sea independiente de las otras consecuencias. Además hace sentido que entre más probable sea un estado de la naturaleza, este tenga mayor peso en la utilidad delsonsumidor.

2.2 Teoría Axiomática[1]

En lo que sigue modificamos algo la terminología. El consumidor elige entre loterías (acciones) alternativas. Una acción “a_i” entrega premios (consecuencias) c_1, c_2,..., c_n con probabilidades objetivas π_{i1},... π_{in} respectivamente. Los eventos son excluyentes y exhaustivos, es decir se tiene que:

- Prob (premio=c_i o premio=c_j) = Prob (premio=c_i) + Prob (premio=c_j)
- $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$

Las loterías se clasifican en simples, si los premios son ciertos, y compuestas, si algunos premios son a su vez loterías. Por simplicidad se supone un número finito de premios. En lo que sigue se usa la siguiente notación. Sean a_1 y a_2 dos loterías simples que representamos por:

[1] Usamos la versión de Herstein y Milnor (1953)

$$a_1 \quad = \quad [\pi_{11},.........., \pi_{1n}]$$
$$a_2 \quad = \quad [\pi_{21},.........., \pi_{2n}]$$

y α un número entre cero y uno, entonces se tiene una nueva lotería:

$$\alpha a_1 + (1-\alpha)a_2 = [\alpha\pi_{11} + (1-\alpha)\pi_{21},......., \alpha\pi_{1n} + (1-\alpha)\pi_{2n}]$$

La teoría realiza algunos supuestos acerca de cómo las personas ven las loterías y de la forma que adoptan las preferencias sobre las loterías.

<u>Supuestos</u> (acerca de cómo las personas ven las loterías)

(1) Si a_1 y a_j son loterías disponibles, entonces la lotería $\alpha a_1 + (1-\alpha)a_j$ también está disponible.

(2) $1\ a_i + 0\ a_j = a_i$

(3) $\alpha a_i + (1-\alpha)a_j = (1-\alpha)a_j + \alpha a_i$

(4) $\beta[\alpha a_i + (1-\alpha)a_j] + (1-\beta)a_j = \beta\alpha a_i + (1-\alpha\beta)a_j$

El último supuesto nos permite desarrollar todas las teorías en términos de loterías simples, pues las loterías compuestas pueden ser reducidas a loterías simples.

<u>Axiomas</u> (acerca de las preferencias sobre las loterías)

i. *Racionalidad.* Las preferencias de los consumidores sobre el conjunto A de loterías son racionales, es decir, completas y transitivas.

ii. *Continuidad*. Existe continuidad en las preferencias. Para cualquier trío de loterías a_i, a_j y a_k, y $0 \leq \alpha \leq 1$ los conjuntos

$\{\alpha \mid \alpha a_i + (1-\alpha)a_j$ Ë $a_k \}$

$\{\alpha \mid \alpha a_i + (1-\alpha)a_j$ Ê $a_k \}$

son cerrados.

iii. *Independencia.* La sustitución de loterías indiferentes en una lotería compuesta, no afecta el ranking, es decir, si la lotería a_1 es preferida a la lotería a_j, y a_k es cualquier otra lotería, entonces

$$\alpha a_i + (1-\alpha)a_k \ \approx\ \alpha a_j + (1-\alpha)a_k$$

El axioma de racionalidad es más fuerte porque se trata de decisiones más complejas. Por su parte, el axioma de continuidad indica que pequeños cambios en las probabilidades asociadas a las loterías no afecta radicalmente el ordenamiento de las loterías. El tercer axioma, llamado axioma de independencia, es novedoso, y central en la teoría de elección bajo incertidumbre. Componer dos loterías distintas con una tercera no debiera cambiar el orden que existía sobre las dos primeras porque componer dos loterías no implica consumir una combinación líneal de ambas, sino que ocurrirá una u otra.

Los axiomas (i) y (ii) son análogos a los que se requieren para la demostración de existencia de una función de utilidad que representa las preferencias de un individuo cuando no hay incertidumbre, El axioma de independencia es novedoso, por su parte, tiene una gran relevancia, pues determina que las preferencias sean representadas por una función de utilidad que cumple la regla de la utilidad esperada.

<u>Lema</u>: Si se cumplen los supuestos y axiomas anteriores entonces:

$$Pc_m + (1-P)c_p \succ P^* c_m + (1-P^*)c_p \Leftrightarrow P > P^*$$

donde c_m es el mejor de los premios y c_p el peor, la expresión $Pc_m + (1-P)c_p$ representa una lotería que con probabilidad P entrega el mejor premio y con probabilidad (1-P) el peor.

La demostración de este lema, que se omite, usa el axioma de independencia. Sólo señalaremos que dado la existencia un número finito de premios y por axioma 1, c_m y c_p existen.

<u>Proposición</u>: Si el conjunto de loterías A satisface propiedades 1 - 4 y las preferencias del consumidor satisfacen axiomas (i) – (iii), entonces existe una función de utilidad sobre consecuencias (premios), $v(c_i)$, tal que las preferencias del consumidor sobre las loterías (acciones) pueden ser representadas por la regla de la utilidad esperada, es decir

$$u(a_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} v(c_j)$$

y para cualquier par de loterías a_i y a_j se tiene a_i Ë $a_j \Leftrightarrow u(a_i) \geq u(a_j)$

<u>Dem</u>: Elijamos, sin pérdida de generalidad, $u(c_m) = 1$ y $u(c_p) = 0$. Para cualquier otro premio c_j, se asigna $v(c_j) = P_j$, donde P_j es tal que

$$P_j c_m + (1-P_j)c_p \approx c_j$$

Tenemos que probar P_j existe y es único. Para ello definimos los siguientes 2 conjuntos:

$$S_j = \left\{ P \;\middle|\; Pc_m + (1-P)c_p \succeq c_j, 0 \leq P \leq 1 \right\}$$

$$I_j = \left\{ P \;\middle|\; Pc_m + (1-P)c_p \preceq c_j, 0 \leq P \leq 1 \right\}$$

c_m Ë c_j para todo j $\Rightarrow$ 1 ε S_j, luego $S_j \neq \Phi$, c_p Ê c_j para todo j $\Rightarrow$ 0 ε I_j, luego $I_j \neq \Phi$.

El axioma de continuidad implica que tanto S_j con I_j son cerrados. Además por axioma de racionalidad dado un P entre cero y uno, éste está en I_j o en S_j o en ambos conjuntos, por lo que $S_j \cup I_j^j$ = [0,1]. Ahora [0,1] es un conjunto conexo por lo cual no puede ser particionado en dos conjuntos cerrados no vacíos. En consecuencia $S_j \cap I_j \neq \Phi$, lo que a su vez implica que existe al menos un P que está contenido en ambos conjuntos. Llamemos P_j al elemento contenido en $S_j \cap I_j$ entonces

$$P_j c_m + (1-P_j)c_p \approx c_j$$

A continuación veremos que P_j es único. Supongamos que existe otro Q_j en $S_j \cap I_j$. Entonces.

$$P_j c_m + (1-P_j)c_p \approx Q_j c_m + (1-Q_j)c_p \approx c_j$$

Por lema se tiene que Q_j = P_j, luego P_j es único para cada c_j, y por lo tanto la función $v(c_j)$ está bien definida. Veamos ahora que efectivamente representa las preferencias del individuo sobre las consecuencias, para ello probaremos para cualquier par c_j y c_k se tiene que $c_j \succeq c_k$ sí y sólo si $v(c_j) \geq v(c_j)$

$$c_j \succ c_k \Leftrightarrow P_j c_b + (1-P_j)c_m > P_k c_k + (1-P_k)c_m \Leftrightarrow P_j > P_k \Leftrightarrow v(c_j) > v(c_k)$$

Falta por probar que la función de utilidad u sobre las loterías, definida usando la regla de la utilidad esperada representa las preferencias del consumidor. Sean 2 loterías a_i y a_k, por la regla de utilada esperada se tiene:

$$u(a_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} v(c_j)$$

$$u(a_k) = \sum_{j=1}^{n} p_{kj} v(c_j)$$

Ahora dado los supuestos sobre como los individuos ven las loterías se tiene:

$$a_i \approx p_{i1}\left[P_1 c_b + (1-P_1)c_m\right] + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + p_{in}\left[P_n c_b + (1-P_n)c_m\right]$$

$$a_i \approx \left[\sum_{j=1}^{n} p_{ij} P_j\right] c_b + \left[\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\left(1-P_j\right)\right] c_m$$

En consecuencia

$$a_i \succ a_k \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} p_{ij} P_j > \sum_{j=1}^{n} p_{kj} P_j \Leftrightarrow u(a_i) > u(a_k)$$

Finalmente verificamos consistencia en el sentido que $u(c_j)$ es igual a $v(c_j)$.

$$u(c_j) = 1v(c_j) + 0\sum_{i \neq j} v(c_i) = v(c_j)$$

En el caso sin incertidumbre vimos que dada una función u que representa las preferencias de los consumidores, entonces cualquier función monótona de u también las representa. Esto nos ilustra muy bien el carácter ordinal de la función de utilidad corriente. Hemos construido funciones de utilidad v y u que representan las preferencias sobre premios y loterías y que cumplen la regla de la utilidad esperada. Veamos que estas funciones de utilidad son cardinales. Imaginemos que $u(c_i)=3u(c_j)$, ello no solo indica que el premio i es preferido al premio j. Imaginemos una lotería que entrega el premio c_j con probabilidad 0,6 y nada con probabilidad 0,4. Entonces el individuo es indiferente entre jugar dicha lotería y una que entrega el premio c_i con probabilidad 0,2.

La teoría estaría en dificultades si existiesen distintas funciones de utilidad que representan las preferencias. Ahora como queremos que se cumpla la regla de la utilidad esperada no sirve cualquier transformación de v. En efecto sólo transformaciones afines son útiles, como se demuestra a continuación. Las transformaciones afines mantienen la relación de indiferencia que existe entre las dos loterías recién comparadas.

<u>Prop</u>. La función de utilidad v antes definida es única salvo transformaciones afines.

<u>Dem</u>. (i) Demostramos primero que una transformación afín de v también representa las preferencias sobre los premios y a través de la regla de la utilidad esperada nos da las preferencias sobre las loterías.

Definamos: $V(c_j) = a + bv(c_j)$

Y supongamos que las preferencias sobre las loterías están dadas por:

$$U(a_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} v(c_j)$$

Claramente V representa las preferencias sobre los premios, veamos que U representa el ordenamiento de las loterías.

$$a_i \succeq a_k \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} p_{ij} v(c_j) \geq \sum_{j=1}^{n} p_{kj} v(c_j)$$

$$U(a_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} V(c_j) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} [a + bv(c_j)]$$

$$U(a_i) = a + b \sum_{j=1}^{n} p_{ij} v(c_j)$$

Análogamente

$$U(a_k) = a + b \sum_{k} p_{kj} v(c_j)$$

Luego

$$a_i \succeq a_k \Leftrightarrow U(a_i) \geq U(a_k)$$

Además U representa las preferencias del consumidor sobre los premios.

$$U(c_j) = 1\, V(c_j) + 0 \sum_{i \neq j} V(c_j) = V(c_j)$$

(ii) Supongamos ahora que V(c) representa las preferencias de los consumidores sobre los premios y además

$$U(a_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} V(c_j)$$

pepresenta las preferencias sobre las loterías. Probaremos que V es una transformación afín de v, es decir que existen σ y τ tales que $V(c_j) = \sigma + \tau v(c_j)$. Sean σ y τ las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$V(c_b) = s + tv(c_b)$$

$$V(c_m) = s + tv(c_m)$$

Entonces:

$$t = \frac{V(c_b) - V(c_m)}{v(c_b) - v(c_m)}$$

Consideremos ahora un premio cualquiera c_j, luego:

$$P_j c_m + (1 - P_j) c_p \approx c_j$$

Ahora U y V deben ser tales que:

$$U(a_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} V(c_j)$$

$$U(c_j) = V(c_j)$$

Luego

$$V(c_j) = P_j V(c_b) + (1 - Pj) V(c_m)$$

$$= P_j [s + dv(c_v)] + (1 - P_j)[s + dv(c_m)]$$

$$= s + dv(c_j)$$

En lo que sigue el símbolo ≈ indica además que dos funciones de utilidad son equivalentes, es decir, $u_1 \approx u_2$ significa que existen constantes τ y σ (con $\tau>0$) tales que $u_1(a) = \sigma + \tau u_2(a)$ para todo a.

Proposición: Si la preferencias sobre el conjunto a de loterías son representadas por una función de utilidad que cumple la regla de utilidad esperada, entonces las preferencias cumplen el axioma de independencia.

Dem.: Si la lotería a_i es preferida a la lotería a_j, y a_k es cualquier otra lotería, entonces debemos probar que:

$$\alpha a_i + (1-\alpha) a_k \approx \alpha a_j + (1-\alpha) a_k.$$

Como a la lotería a_i es preferida a la lotería a_j, entonces $u(a_i) \geq u(a_j)$. Por otro lado, por regla de la utilidad esperada y realizando algunos pasos algebraicos se tiene que:

$$u(\alpha a_i + (1-\alpha)\, a_k)\,) = \alpha u(a_i) + (1-\alpha)u(a_k)$$

$$u(\alpha a_j + (1-\alpha)\, a_k)\,) = \alpha u(a_j) + (1-\alpha)u(a_k)$$

De donde se concluye la demostración.

En resumen si se cumple el axioma de independencia se cumple la regla de utilidad esperada. Y además la función de utilidad es única salvo transformaciones afines.

6. Enfoque Parámetros Estadísticos

Este enfoque se usa preferentemente en análisis de portafolio, el que se dedica es estudiar como combinar distintos activos. Supone que las preferencias de las personas sólo dependen del valor esperado y la varianza de los activos. Los individuos prefieren, a igualdad de varianza, activos con mayor valor esperado. Por su parte, la aversión al riesgo lleva a preferir activos con menor varianza. Luego, para un individuo adverso al riesgo, las curvas de indiferencia tienen la forma:

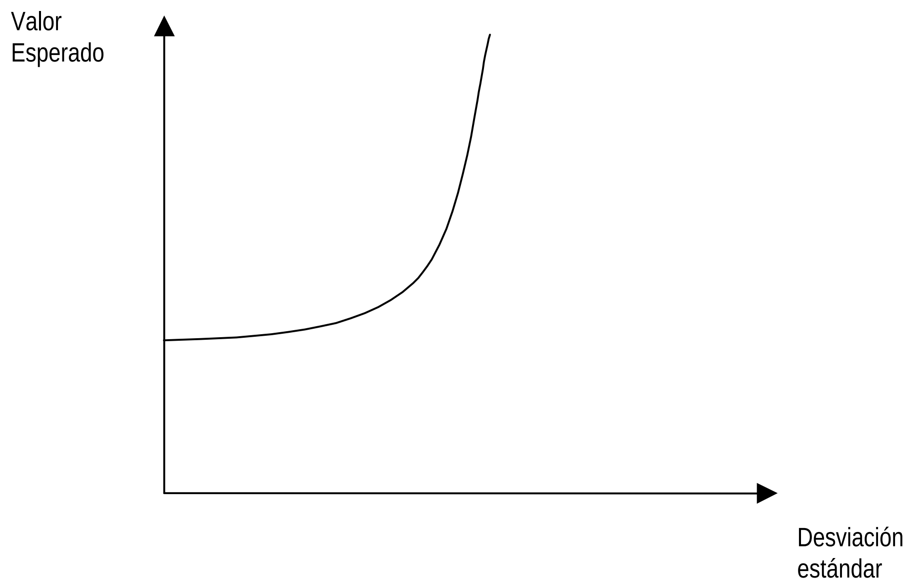


Fig. 4: Curva de indiferencia de un inversionista adverso al riesgo

En el caso de una persona neutra al riesgo, la curva de indiferencia es una recta horizontal. Por su parte, un individuo amante del riesgo tendrá una curva con pendiente negativa.

En enfoque general de von Neumann – Morgenstern establece que la utilidad de un ingreso aleatorio Y, compuesto de una riqueza cierta W y un juego z, es igual al valor esperado de la utilidad, es decir,

$$\begin{aligned}
u(Y) &= E(u(W+z)) \\
&= E\left(u(W) + zu'(W) + \frac{z^2}{2}u''(W) + \frac{z^3}{6}u'''(W) + \ldots \right) \\
&= u(W) + u'(W)E(z) + \frac{1}{2}u''(W)E(z^2) + \frac{1}{6}u'''(W)E(z^3) + \ldots \\
&= u(W) + u'(W)E(z) + \frac{1}{2}u''(W)(s_z^2 - E(z)^2) + \ldots
\end{aligned}$$

Luego el enfoque general se reduce al de parámetros cuando la función u es cuadrática o los momentos centrales de orden 3 o mayores de la variable aleatoria z son cero (por ejemplo la distribución normal).

Caso 1. Supongamos que hay dos activos, uno seguro con rentabilidad a, y otro riesgoso con rentabilidad aleatoria r. Se tiene que el valor esperado $\bar{r}$ del activo riesgoso es mayor que a. Supongamos que x denota la fracción de la cartera que está invertida en el activo riesgoso. Luego la rentabilidad del portafolio es:

$$r_m = xa + (1-x)r$$

y además

$$\bar{r}_m = xa + (1-x)\bar{r}$$
$$s_m = (1-x)s_r$$

donde $\bar{r}_m$ designa el valor esperado de la cartera de inversiones, σ_r la desviación estándar del activo riesgoso y σ_m la desviación estándar de la cartera. Luego la línea de presupuesto del inversionista está dada por la recta que une los puntos (0, a) y (σ_r, $\bar{r}$). En efecto, el inversionista puede alcanzar cualquier punto de dicha recta combinando el activo sin riesgo con el activo riesgoso.

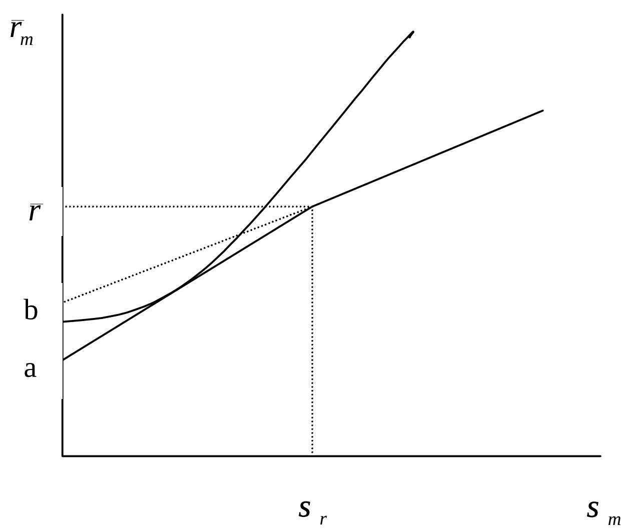


Fig. 5: Portafolio óptimo

Si además suponemos que la persona se puede endeudar a una tasa de interés b, con $a < b < \bar{r}$, entonces la línea de presupuesto se prolonga más allá del punto (σ_r, $\bar{r}$), pero con pendiente $(\bar{r} - b)/s_r$, tal como se observa en la figura 5.

El portafolio óptimo se obtiene en el punto de tangencia entre la línea de presupuesto y una curva de indiferencia.

Caso 2. Suponemos que hay 2 activos riesgosos, que indicamos con subíndices 1 y 2. En este caso x es la fracción de la cartera invertida en el activo 1. Luego

$$\bar{r}_m = x\bar{r}_1 + (1-x)\bar{r}_2$$
$$s_m^2 = x^2 s_1^2 + (1-x)^2 s_2^2 + x(1-x)\,\mathrm{cov}(r_1, r_2)$$

Consideremos 2 situaciones extremas,

(i) El coeficiente de correlación entre los activos riesgosos es 1, es decir ambos activos se mueven de idéntica manera.

Recordando que $r_{12} = \dfrac{\mathrm{cov}(r_1, r_2)}{2s_1 s_2} = 1$

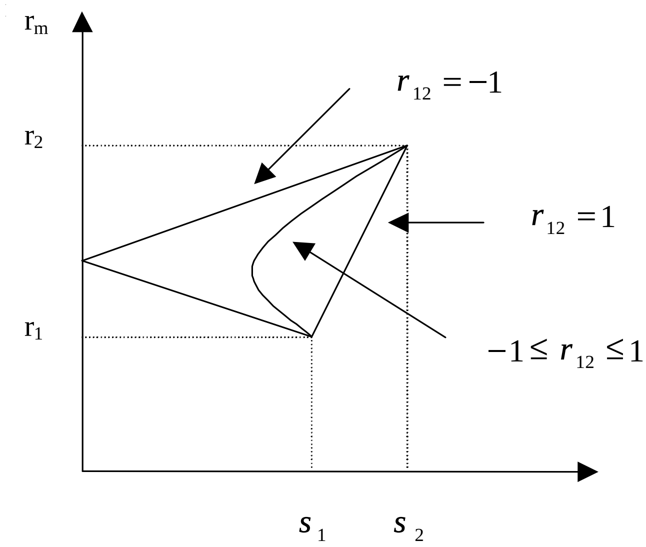
Se sigue que $s_m = x s_1 + (1-x) s_2$

(ii) El coeficiente de correlación entre los activos riesgosos es –1. Es decir, los dos activos se mueven en direcciones opuestas. Cuando uno mejora el otro empeora y en la misma proporción.

Cuando $r_{12} = -1$ se tiene:

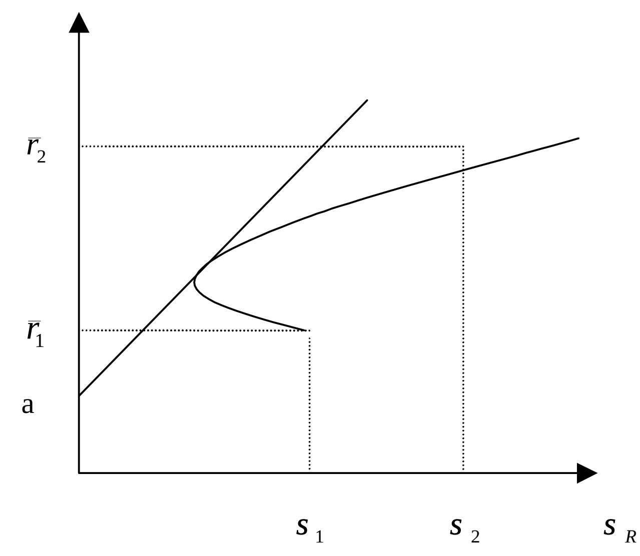
$$s_m^2 = (x s_1 - (1-x) s_2)^2 \quad , \quad s_m = \left| x s_1 - (1-x) s_2 \right|$$

Notar que eligiendo $x = s_2 / (s_1 + s_2)$ se tiene $s_m = 0$. Luego la combinación de dos activos riesgosos, pero que están inversamente correlacionados permite construir una cartera sin riesgo



En los casos intermedios con -1≤ ρ_{12} ≤ 1 la línea de presupuesto del inversionista está contenida entre las líneas de presupuesto de los dos casos extremos. Luego la línea de presupuesto del inversionista se expande cuando los activos no están correlacionados. Luego diversificación permite obtener igual rentabilidad esperada con menor riesgo cuando los activos no están perfectamente correlacionados.

Caso 3: 1 activo sin riesgo y 2 activos con riesgo



Si consideramos el caso en que la tasa de interés de colocación b es igual a la de captación a, lo que se observa es que primero se decide la combinación óptima de activos riesgosos, que corresponde al punto de tangencia entre la recta que parte en (0, a) y la curva que describe las distintas combinaciones de activos riesgosos. Esta primera etapa es independiente de las preferencias del inversionista. En una segunda etapa el inversionista elige, de acuerdo a sus preferencias, la combinación óptima entre el activo sin riesgo y la combinación óptima de activos sin riesgo.

Caso general. Veremos que el resultado anterior también aplica el caso general con un activo sin riesgo y varios activos riesgosos

Sea x_0 la fracción de la cartera de inversiones destinada al activo sin riesgo y x_i fracción de la cartera invertida en el activo con riesgo i. Luego la rentabilidad del portafolio es

$$r_m = x_0 a + \sum_{i=1}^{n} x_i r_i$$

cuya tasa esperada de retorno es

$$\bar{r}_m = x_0 a + \sum_{i-1}^{n} x_i \bar{r}_i$$

y su varianza

$$s_n^2 = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j s_{ij}$$

donde s_{ij} representa la covarianza de los activos i, j y s_{ii} la varianza del activo i.

El problema del inversionista es dada una tasa de rentabilidad esperada R, encontrar el portafolio que minimiza el riesgo, es decir

$$\begin{aligned} &\underset{x_i}{Min} \quad \sum_{i,j} x_i x_j s_{ij} \\ &\underline{sa} \quad \sum_i x_i \bar{r}_i + x_0 a \geq R \end{aligned}$$

El lagrangeano de este problema es:

$$L = \sum_{i,j} x_i x_j s_{ij} - l \left(\sum_i x_i \bar{r}_i + x_0 a - R \right)$$

Dado que $x_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i$, el problema se puede reescribir

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j s_{ij} - l \left(\sum_{i=1}^{n} x_i (\bar{r}_i - a) - (R - a) \right)$$

Luego las condiciones de Kuhn-Tucker son:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 2\sum_j x_j s_{ij} - l(\bar{r}_i - a) \geq 0 \qquad x_i \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

Suponiendo una solución interior, es decir que en la cartera de inversión están todos los activos, se llega a:

$$2\sum_j x_j s_{ij} = l(\bar{r}_i - a)$$

Multiplicando la igualdad anterior por x_i y sumando sobre el índice i se obtiene:

$$2\sum_{i,j} x_i x_j s_{ij} = l(\bar{r}_m - a)$$

Luego

$$2s_m^2 = 2\sum_{i,j} x_i x_j s_{ij} = l(\bar{r}_m - a)$$

Por otro lado

$$\mathrm{cov}(r_i, r_m) = \sum_j x_j s_{ij},$$

Luego

$$\mathrm{cov}(r_i, r_n) = \frac{1}{2} l(r_i - a)$$

Y finalmente se concluye:

$$(\bar{r}_i - a) = \frac{\mathrm{cov}(r_i, r_m)}{s_m^{\;2}} (\bar{r}_m - a)$$

En la literatura se denomina β_i a la expresión:

$$b_i = \frac{\mathrm{cov}(r_i, r_m)}{s_m^{\;2}},$$

La expresión $(\bar{r}_i - a)$ se denomina prima por riesgo del activo porque mide cuanto mayor debe ser la rentabilidad esperado del activo con respecto al activo sin riesgo para que el inversionista esté dispuesto a asumir el riesgo del activo. Luego el resultado indica que en la cartera óptima debe tenerse que el premio por riesgo que recibe un activo $(\bar{r}_i - a)$ es β veces la prima por riesgo de la cartera $(\bar{r}_m - a)$.

Una cartera de activos permite diversificar riesgos, pero hay un riesgo no diversificable. Cuando la economía anda mal la rentabilidad de cualquier portafolio de inversiones disminuye. Luego a pesar de la diversificación hay un riesgo no diversicable; el riesgo de la cartera.

Los beta miden la sensibilidad de los activos individuales a variaciones en el valor de la cartera de mercado. β Por ejemplo un activo con β igual a 2 indica que cuando la cartera disminuye (aumenta) su rentabilidad en un cierto porcentaje, dicho activo disminuye (aumenta) su rentabilidad dos veces. Luego una activo con β igual a 2 aumenta la varianza de la cartera, (el β mide la contribución marginal al riesgo de la cartera), razón por lo que se le exige una prima por riesgo mayor. Por el contrario a activos con β menor a 1 se les exige premios por riesgos menores que a la cartera en su conjunto.

Notar que el resultado que establece que en la cartera óptima el premio por riesgo de un activo es β veces el premio por riesgo de la cartera, se obtuvo independientemente de las preferencias del inversionista (salvo el supuesto que prefiere mayor rentabilidad y menor riesgo). Lo que establece el resultado es en qué proporción se deben combinar los activos riesgosos. Luego el inversionista, dependiendo de sus preferencias, elegirá una combinación óptima entre el activo sin riesgo y la combinación óptima de activos riesgosos.