INDICE

		Pág.
1.	**Función de utilidad**	2
2.	**Función indirecta de utilidad**	8
3.	**Función de gasto**	10
4.	**Ecuación de Slutzky e integrabilidad**	12
5.	**Bienes normales, de Giffen, complementarios y sustitutos**	15
6.	**La demanda agregada**	17
7.	**Excedente del consumidor**	18
8.	**Indices de costo de vida**	25
9.	**Preferencias reveladas**	30

TEORIA DEL CONSUMIDOR

1. Función de utilidad

En la primera parte de este apunte veremos que la función de utilidad es sólo una forma conveniente de representar las preferencias de los individuos. Y no es la única. Otra forma de hacerlo es a partir de las elecciones de consumo que realizan las personas. La ventaja de la segunda forma es que es más directa; las elecciones que realizan las personas pueden ser observadas. Sin embargo, el análisis recurriendo a la idea de preferencias es más simple. Además, se puede mostrar que bajo ciertas condiciones ambas teorías coinciden.

En lo que sigue supondremos que en la economía existen n bienes, por lo que una canasta de consdumo estará representada por un vector $x = (x_1, ... , x_n)$, donde x_i designa la cantidad del bien i contenida en la canasta. En el caso de bienes durables, los x_i corresponden a los servicios aportados durante el período. La función de utilidad que construimos es de carácter ordinal y no cardinal. Es decir, si u denota la función de utilidad, entonces $u(x) \geq u(y)$ sólo indica que la canasta x es preferida a la canasta y, por lo cual cualquier función monótona de u representa exactamente las mismas preferencias.

Imaginemos a un consumidor enfrentado a un conjunto de posibles canastas de consumo. Habitualmente se supone que este conjunto es ∇_+^n, pero bien podría tratarse de un conjunto más restringido, por ejemplo el conjunto de todas las canastas que le permiten subsistir al individuo. En todo caso, es necesario asumir que este conjunto de las posibles canastas es cerrado, convexo y no-vacío. Usaremos X para denotar a dicho conjunto. Con estos supuestos tenemos quie los bienes son perfectamente divisibles, es decir, estamos excluyendo la posibilidad que los bienes se consuman en cantidades discretas.

Supongamos que el consumidor tiene preferencias sobre el conjunto X. Usamos para denotar la relación de preferencia, es decir dadas dos canastas x e y, $x \quad y$ establece que la canasta x es preferida a y. Un consumidor prefiere una canasta a otra cuando la primera es, a su juicio, al menos tan buena como la segunda.

A partir de la relación de preferencia se pueden definir otras 2:

(i) Indiferencia: se dice que la canasta x es indiferente a la canasta y si $x \quad y$ e $y \quad x$, y se escribe $x \approx y$.

(ii) Preferencia estricta: se dice que x es estrictamente preferido a y si x es preferido a y, pero y no es preferido a x, denotándose $x \quad y$.

Se dice que las preferencias son racionales si cumplen las dos condiciones siguientes:

1) Completitud: Para cualquier par de canastas x e y en X, o bien x y o y x, o $x \approx y$. Osea dadas 2 canastas el individuo es capaz de decidir si prefiere una, la otra, o le son indiferentes.

2) Transitividad: Para cualquier trío de canastas x, y, z en X, si x y e y z, entonces x z.

Dadas estas dos propiedades,   es una relación de orden, por lo tanto es posible hablar de maximización. Normalmente se supone que las preferencias de un individuo son racionales.

Estas primeras condiciones no parecen muy exigentes. Sin embargo no siempre se cumplen. Por ejemplo, hay evidencia que una persona puede estar dispuesta a realizar un viaje a una tienda más apartada para comprar un artículo que cuesta 100 porque se vende con un descuento de 20%, pero no para comprar un artículo que cuesta 1.000 y que tiene un descuento de 2%. Notar que la acción en ambos casos produce el mismo beneficio. También a veces las personas por problemas de fuerza de voluntad, que se refiere a la preferencia por la gratificación instantánea, realizan acciones de las que después se arrepienten. Por ello, un obeso come más de lo que quisiera pensando que va a comenzar el régimen la próxima semana. Es decir su consumo no representa necesariamente su canasta preferida.

A las condiciones de racionalidad agregamos la siguiente:

3) Continuidad: Para cada $y \in X$ todos los conjuntos de la forma $\{x \mid x \quad y\}$ y $\{x \mid x \quad y\}$ son cerrados. Luego las preferencias son continuas si y sólo sí para cualquier sucesión $\{x_k\}$ en el conjunto X, tal que x_k y y $x_k \longrightarrow x$, entonces x y.

La intuición de esta propiedad es que no existan discontinuidades en las preferencias.

Si las preferencias de un individuo cumplen las tres propiedades anteriores, entonces es posible construir una función de utilidad continua que las represente. Sin embargo, con el fin de simplificar la demostración de existencia, impondremos una condición adicional: la monotonía, y supondremos que el conjunto de canastas posibles es ∇_+^n.

4) Monotonía: Si la canasta x contiene lo mismo o más de cada bien que la canasta y, y estrictamente más de al menos un bien, entonces x y. Es decir, más es mejor.

Definición: Diremos que una función de utilidad representa las preferencias de una persona cuando se tiene que x   y sí y sólo sí $u(x) \geq u(y)$.

Notar que si la función u representa las preferencias y h es cualquier función estrictamente creciente, entonces la función compuesta $h \lfloor u$ también representa las preferencias. En consecuencia, la función de utilidad sólo permite ordenar canastas (orden cardinal), pero no decir cuánto mejor es una que otra (orden cardinal).

Proposición: Si las preferencias son completas, transitivas, continuas y monótonas, entonces existe una función de utilidad continua u: ∇_+^n ——> ∇ que representa a dichas preferencias.

<u>Dem.</u>: Sea *x* un elemento cualquiera en ∇_+^n, entonces definamos u(x) como aquel valor para el cual $x \approx u(x)e$, donde e denota al vector de unos. Primero se demuestra que para cada x, u(x) existe y es único. Para ello definimos los conjuntos:

$B = \{t \, \varepsilon \, \nabla \mid te \quad x\}$

$W = \{t \, \varepsilon \, \nabla \mid te \quad x\}$

Ambos conjuntos son no vacíos. En efecto, por monotonía 0 ε W y $t^* = max\{x_i\}$ pertenece a B. Además es fácil comprobar --usando el supuesto de continuidad en las preferencias-- que ambos conjuntos son cerrados. Por completitud de las preferencias $B \cap W = \nabla$. Entonces la conectividad de ∇ implica que B∪W ╪ ϕ. No resulta difícil comprobar que existe un solo elemento en B∪W.

(ii) u(x) es una función continua.

Para probar la continuidad de u(x) basta con demostrar que las imágenes inversas de los conjuntos $[u_0, \infty[$ y $[0, u_o]$ son cerradas en ∇.

Los conjuntos $u^{-1}[u_o, \infty] = \{x \mid u(x) \geq u_o\} = \{x \mid x \quad u_o e\}$

$u^{-1}[0, u_o] = \{x \mid u(x) \leq u_o\} = \{x \mid x \quad u_o e\}$

son cerrados a causa de la condición de continuidad.

Nota: $u(x) \geq u_o \Rightarrow x \approx u(x)e \quad u_0 e$.

(iii) la función u representa las preferencias.

Hay que probar que *x* *y* sí y sólo sí $u(x) \geq u(y)$. Se tiene que $u(x)e \approx x$ y $u(y)e \approx y$ por definición de u( ). Luego $x \quad y \Leftrightarrow u(x)e \quad u(y)e \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$, lo cual completa la demostración.

Podemos dar la intuición de la demostración para el caso con dos bienes (n=2). Dada una canasta cualquiera podemos encontrar el conjunto de canastas en ∇_+^2 que son indiferentes a la primera. Esto da origen a curvas en el espacio ∇_+^2 (las que corresponden a las curvas de isoutilidad!). La continuidad de las preferencias garantiza que las curvas son continuas. Además por condición de transitividad las curvas no se cortan. Luego la utilidad asociada a todas las canastas de cada curda es simplemente la distancia entre el origen y el punto en que la curva corta a la línea de 45° (notar que en la demostración se usa la distancia divida por $\sqrt{2}$).

Para ilustrar la importancia de la condición de continuidad en la demostración de existencia de una función de utilidad que represente las preferencias, habitualmente se recurre al ejemplo del orden lexicográfico. El orden lexicográfico $_1$ en ∇_+^2 se define del siguiente modo

$$x \ _1 y \quad \text{si} \quad \text{(i) } x_1 > y_1, \text{ o } \text{(ii) } x_1 = y_1 \text{ y } x_2 \geq y_2$$

En la figura 1 observamos que los conjuntos $\{x \mid x \ _1 y\}$ no son cerrados. Supongamos que existe una función de utilidad continua que representa estas preferencias. Luego a cada *a* en ∇ podemos asociar el conjunto $\{u(x) \mid x_1 = a\}$ en ∇. Luego existiría en número no contable de intervalos no degenerados en ∇, lo cual no es posible.

.

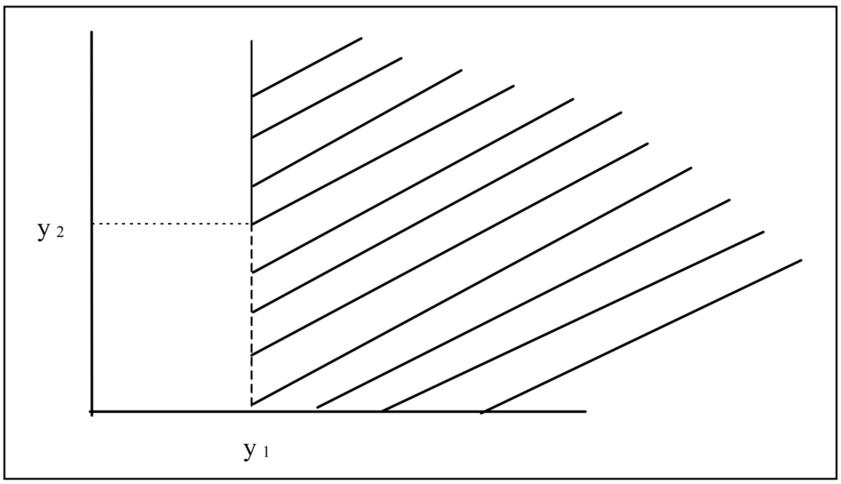

Fig. 1: Orden lexicográfico

La propiedad de monotonía es fuerte. Imaginemos la siguiente situación: dos canastas iguales salvo que una posee más de uno de los bienes, entonces la canasta que tiene más del bien debiera ser estrictamente preferida. Pero podría darse que el individuo está saturado de ese bien y tener más no le reporta ningún beneficio, y por el contrario podría disminuirle el bienestar.[1] Por ello, en la demostración de algunos resultados se utiliza una propiedad más débil.

5) <u>No-saturación local</u>: Para cualquier canasta $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe alguna canasta y tal que $\|x-y\| < \varepsilon$ e $y \quad x$.

Notar que esta última propiedad es mucho más débil que monotonía. En efecto, sólo se requiere que exista un bien (o combinación de bienes) que al aumentar su consumo también

[1]Con el fin de ilustrar lo restrictivo de la monotonicidad esta condición diría que comnsumir una unidad más de comida siempre aumenta la utilidad, aunque el individuo venga de un restaurant "tenedor libre" y esté más que satisfecho. Más aún el hecho que no se coma todo lo que hay en un restaurant muestra que en algún momento la comida lo saturó.

aumente la demanda. Una propiedad adicional de las preferencias necesaria para algunos resultados importantes es la de convexidad.

6) <u>Convexidad (débil)</u>: Para cualquier x en X, los conjuntos $Q_x \equiv \{y\ \varepsilon\ X \mid y \quad x\}$ son convexos.

Lema: Las preferencias son convexas si y sólo si para cualquier par de canastas x, e y en X, $1 \geq \alpha \geq 0$, sí y x, entonces $\alpha y + (1-\alpha)x \quad$ x.

<u>Dem</u>: (=>) Sean x, y en X, tales que $y \quad x$. Entonces, tanto y como z pertenecen a Q_x, y como este conjunto es convexo $\alpha y+ (1-\alpha)x$ también está en él, por lo que $\alpha y + (1-\alpha)x \quad x$.

(<=) Sean y y x canastas en Q_x. Luego por condición de convexidad $\alpha y+(1-\alpha)x$ está en Q_x. Luego por definición de Q_x, $\alpha y+ (1-\alpha)x \quad x$.

La convexidad refleja la idea que las personas prefieren la diversidad. Este no es un supuesto muy retrictivo y en términos generales refleja como son las preferencias de las personas.

Proposición: Si las preferencias son convexas entonces cualquier función de utilidad que las represente es cuasicóncava.

<u>Dem</u>: Debemos demostrar que los conjuntos de la forma $Q_{u^\circ} \equiv \{x\ \varepsilon\ X \mid u(x) \geq u^\circ\}$ son convexos. Se tiene que el conjunto anterior es equivalente a $\{x\ \varepsilon\ X \mid x \quad u^\circ e\}$, el cual es convexo.

Hemos mencionado que la función de utilidad no es más que una representación numérica de las preferencias, y que por ende cualquier función monótona de una función de utilidad representa exactamente las mismas preferencias. Luego si las preferencias son convexas, cualquier función de utilidad que las representa debiera ser cuasicóncava, como efectivamente lo es.

Notar que dada la continuidad de la función u, el conjunto Q_{u° es cerrado, por lo que podemos introducir la siguiente definición:

<u>Def</u>: Se denomina curva de indiferencia o isoutilidad a la frontera del conjunto Q_{u°, es decir al conjunto.

$$\{ x\ \varepsilon X \mid u(x) = u^0 \}$$

La igualdad $u(x_1, \dots, x_n) = u^0$ define implícitamente a x_n como función de $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Podemos llamar h a la función de ∇_+^{n-1} en ∇_+ así definida, entonces la función $x_n = h(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ satisface

$$u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, h(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})) = q^0$$

Prop: Si la función u es cuasicóncava, entonces la función h es convexa.

Dem: La demostración es análoga a la que se usó para probar que la función h es convexa cuando la función de producción es cuasicóncava.

En el caso de 2 insumos podemos ilustrar las curvas de indiferencia, las cuales están dadas por $h(x_2)$.

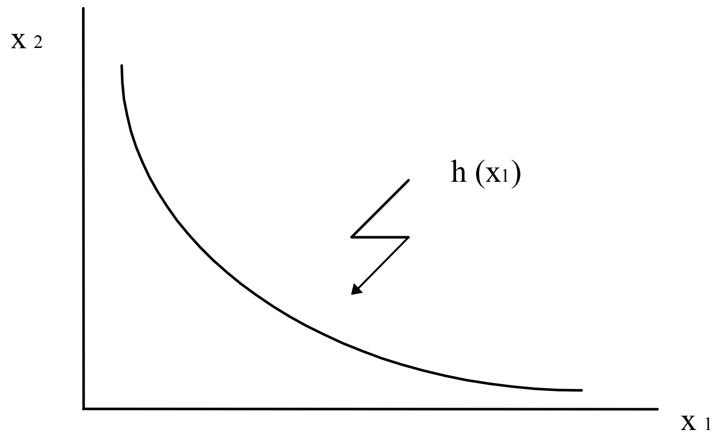

Fig. 2: Curva de Isoutilidad

Def.: La Tasa Marginal de Sustitución entre dos Bienes (TMSB) indica en cuantas unidades se debe aumentar el consumo de uno de ellos, si se quiere mantener la utilidad constante cuando la disponibilidad del otro bien disminuye en una unidad.

Esta definición sólo considera 2 bienes, los consumos de los restantes se pueden suponer constantes. Entonces escribimos la curva de indiferencia:

$$u(x_1, x_2) = u^0,$$

la cual define implícitamente a x_2 como función de x_1, es decir $x_2 = h(x_1)$, donde $u(x_1, h(x_1)) = q^0$. Entonces la TMSB está dada por

$$TMSB = \frac{dx_2}{dx_1} = h'(x_1)$$

Por lo cual la TMSB es igual a la pendiente de la curva de indiferencia. Usando el teorema de la derivada implícita se tiene:

$$u(x_1, h(x_1)) = q^0$$

$$u_1 + u_2 h'(x_1) = 0$$

luego

$$TMSB = h' = \frac{u_1}{u_2} < 0$$

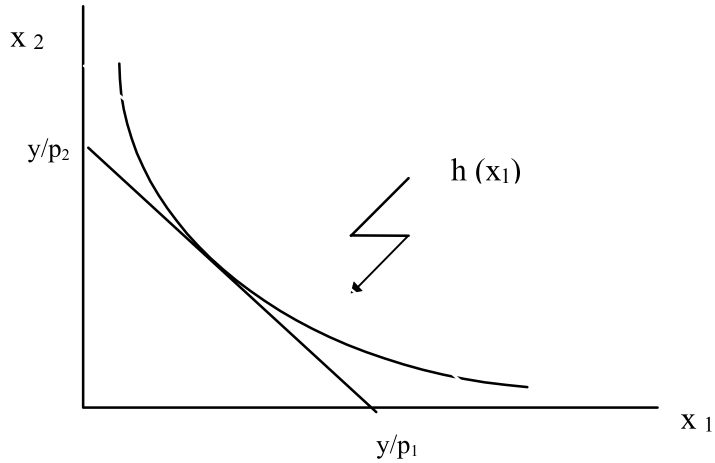

Fig. 3: Tasa de Marginal de Sustitución entre Bienes.

Si la función f es cuasicóncava, entonces la función h es convexa. Lo cual implica que a medida que disminuye la cantidad disponible del factor 1 se necesitan más unidades del factor 2 para sustituir una unidad del bien 1. Entonces con dos bienes es simple dar la intuición del postulado de convexidad. La idea es que a medida que disminuye un bien cada vez es más difícil reemplazarlo por el otro. Esta idea se generaliza para varios bienes señalando que los individuos prefieren canastas de consumo diversificadas.

2. Maximización de utilidades y la función indirecta de utilidad

Estudiamos el problema de decisión de una persona cuyas preferencias pueden ser representadas por una función de utilidad continua. Supondremos que maximiza su utilidad sujeto a su restricción presupuestaria, formalmente,

$$\max_{x} u(x)$$

$$\text{s.a} \quad px \leq y$$
$$x \geq 0$$

donde y denota el ingreso y p el vector de precios. Notar que implícitamente estamos asumiendo que el consumidor no afecta los precios. Si los precios son estrictamente positivos, entonces se trata de la maximización de una función continua sobre un compacto por lo que tiene solución. En lo que sigue suponemos que la solución es única. Una condición suficiente para que ello ocurra es que la función de utilidad sea estrictamente cóncava, pero exigir concavidad de la función de utilidad no tiene una clara interpretación económica en este contexto.. Notar que si las preferencias son convexas, entonces la función de utilidad es cuasicóncava.

Si la función de utilidad es continuamente diferenciable podemos usar las condiciones de Kuhn-Tucker para caracterizar la solución del problema de maximización. Cuando la función de utilidad es cóncava entonces los condiciones de Kuhn-Tucker son necesarias y suficientes para asegurar la optimalidad. El Lagrangeano del problema es,

$$L = u(x) + \mu[y-px],$$

luego las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = u_i(x) - \mu p_i \leq 0; \qquad x_i \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

Las condiciones de primer orden requieren que en el óptimo las utilidades marginales de todo los bienes consumidos sean proporcionales al precio correspondiente. Dado que μ corresponde a la restricción presupuestaria, mide en cuanto aumenta la utilidad con un ingreso adicionbal de un peso, por lo que representa la utilidad marginal del ingreso. Luego la condición de primer orden nos indica que un bien se demanda hasta el punto que su utilidad marginal se iguala al costo que éste tiene para el consumidor en términos de ingreso.

Podemos ilustrar la solución con dos bienes. Dada la línea de restricción presupuestaria el individuo busca el consumo de mayor utilidad, el cual se alcanza en el punto en que una curva de indiferencia es tangente a la línea de restricción presupuestaria. Es decir, en el punto óptimo se tiene

$$\frac{u_1(x)}{u_2(x)} = \frac{p_1}{p_2},$$

luego la solución óptima corresponde al punto de tangencia entre la línea de restricción presupuestaria y una curva de isoutilidad.

Solución al problema general. Suponiendo que la solución de cada problema particular es única, entonces la solución al problema general son n funciones de demanda Marshalliana con n+1 argumentos cada una, que denotaremos

$$x_i = d^i(y, p)$$

las cuales representan el consumo del bien i cuando se maximiza la utilidad para precios dados p y un nivel de ingreso y. Las funciones de demanda Marshalliana son homogéneas de grado 0. En efecto, cuando el ingreso y el precio de los bienes que compra un individuo varían en una misma proporción, no hay razón para cambiar la canasta de consumo. Formalmente, cuando ambos lados de la restricción presupuestaria se multiplican por un mismo factor el problema de optimización no se modifica.

Además, cuando las preferencias son no-saturadas localmente, la restricción presupuestaria está siempre activa, es decir, $px = y$. Esta es la llamada ley de Walras. La demostración es simple. Si el gasto total fuese menor al ingreso, dado que las preferencias son no saturadas localmente, se podría encontrar una canasta que produce una mayor utilidad. En lo que sigue suponemos que se cumple la ley de Walras.

El valor de la solución óptima está dado por,

$$v(y,p)= u(d^1(y,p), ... , d^n(y,p))$$

Esta función denominada función de utilidad indirecta, representa la máxima utilidad que es posible alcanzar dado un ingreso y y un vector de precios p. La función de utilidad indirecta es homogénea de grado cero dado que las funciones de demanda lo son. Además es no-decreciente en el ingreso y, y estrictamente creciente en el ingreso cuando las preferencias son localmente no-saturadas.

También hay una solución general para el multiplicador de Lagrange, la cual escribimos:

$$\mu = \Omega(y,p)$$

3. Minimización del gasto y función de gasto

Otra forma de enfrentar el problema del consumidor es como una minimización del gasto. En este caso se trata de alcanzar una utilidad dada a mínimo costo. Entecos el problema lo escribimos:

$$\begin{aligned} &\underset{x}{Min}\ px \\ &s.a.: u(x) \geq u^0 \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

donde u^o es el nivel de utilidad que se desea alcanzar. Notar que las condiciones de primer orden son las mismas que en el problema de maximización de utilidad y que una condición suficiente de segundo orden es que la función de utilidad sea cuasicóncava, es decir, que las preferencias sean convexas. Si además las preferencias son estrictamente convexas, entoces para cada punto (u^0, p^0) la solución es única, y la solución del problema general es un nuevo conjunto de funciones

$$x_i = h^i(u, p) \qquad\qquad i = 1,..., n$$

que se denominan funciones de demanda compensada o Hicksianas.

Función de gasto. El valor de la solución al problema de minimización anterior, que se denomina función de gasto, está dado por:

$$e(u,p) = \sum_{i=1}^{n} p_i h^i(u,p),$$

Por lo tanto e(u, p) representa el menor ingreso que se requiere para alcanzar un nivel de utilidad u cuando los precios están dados por el vector p.

Existe una clara analogía entre el problema de minimizacón de costo en las empresas y las persona, por lo que la función de gasto e(u, p) tiene todas las propiedades de la función de costos, es decir,

(1) es homogénea de grado 1 en los precios para cada nivel de utilidad

(2) es cóncava en los precios para cada nivel de utilidad

(3) $$\frac{\partial e(u,p)}{\partial p_i} = h^i(u,p),$$

$$\frac{\partial e(u,p)}{\partial u} = \Omega(u,p)$$

Combinando las propiedades anteriores se obtienen nuevos resultados. El desarrollo es similar al que se hace con la función de costos por lo que se omite.

(4) $h^i(u,p)$ es homogénea de grado cero en precios

(5) $$\frac{\partial h^i(u,p)}{\partial p_i} \leq 0$$

(6) $$\frac{\partial h^i(u,p)}{\partial p_j} = \frac{\partial h^j(u,p)}{\partial p_i}$$

Las propiedades anteriores son las únicas que caracterizan a la teoría del consumidor.

Cuando la restricción presupuestaria está activa, es decir, se cumple la ley de Walras, se establece una correspondencia entre el problema de maximización de utilidades y el de minimización del gasto.

$$u^0 = v(y^0, p^0) \quad \Longleftrightarrow \quad y^0 = e(u^0,p^0)$$

En efecto, supongamos que x^0 es la solución del problema de maximización de utilidades, luego $u^0= u(x^0)$. Además $p^0x^0 = y^0$, por lo que $e(u^0,p^0) \leq y^0$. Si la desigualdad fuera estricta, dado el supuesto de no-saturación local, habría x estrictamente preferido a x^0, que se podría comprar con el ingreso y^0

Algunas identidades útiles son las siguientes:

(1) $e(v(y,p), p) = y$

(2) $v(e(u, p), p) = u$

(3) $h^i(u,p) = d^i(e(u,p), p)$

(4) $d^i(y,p) = h^i(v(y,p), p)$

Un resultado que surge en forma inmediata es la llamada identidad de Roy.

Proposición: (Identidad de Roy) Si tanto el ingreso como el vector de precios son estrictamente positivos, entonces:

$$d^{i}(y,p) = -\frac{\dfrac{\partial v(y,p)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial v(y,p)}{\partial y}} \qquad i = 1, \dots, n$$

Dem.: El resultado se obtiene diferenciando la identidad v(e(u, p), p) = u, y usando la propiedad derivativa de la función de gasto.

La identidad de Roy tiene bastante uso en economía lo que ilustramos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Imaginemos un agricultor que entre otros productos cultiva tomates, y cuya producción de tomates está fija en q_1. Usamos el subíndice uno para representar a los tomates. Su ingreso está entonces dado por:

$$y = y_0 + p_1 q_1$$

Y queremos saber como se modifica la utilidad del individuo cuando aumenta el precio del tomate. Para ello derivamos la función de utilidad indirecta con respecto al precio de los tomates.

$$\frac{dv(y,p)}{dp_1} = \frac{\partial v(y,p)}{\partial y}\frac{dy}{dp_1} + \frac{\partial v(y,p)}{\partial p_1}$$

Usando la identidad de Roy y agrupando términos se llega a:

$$\frac{dv(y,p)}{dp_1} = (q_1 - x_1)\frac{\partial v(y,p)}{\partial y}$$

Luego el alza en el precio del tomate beneficia al consumidor siempre y cuando sea un productor neto, es decir, produzca más de lo que consuma.

4. Ecuación de Slutzky

En lo que sigue se muestra que el efecto de un cambio en un precio en la demanda por un bien se puede descomponer en un efecto sustitución y un efecto ingreso.

$$\left.\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right|_{y=cte} = \underbrace{\left.\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right|_{u=cte}}_{\textit{efecto sustitución}} - \underbrace{x_j \left.\frac{\partial x_i}{\partial y}\right|_{p=cte}}_{\textit{efecto ingreso}}$$

<u>Dem</u>: Derivando la identidad $h^i(u,p) = d^i(e(u,p),p)$ con respecto a p_j se obtiene:

$$\frac{\partial h^i}{\partial p_j} = \frac{\partial d^i}{\partial y}\frac{\partial e}{\partial p_j} + \frac{\partial d^i}{\partial p_j}$$

Reordenando términos y usando la propiedad derivativa se obtiene

$$\frac{\partial d^i}{\partial p_j} = \frac{\partial h^i}{\partial p_j} - x_j\frac{\partial d^i}{\partial y}$$

luego

$$\left.\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right|_{y=cte} = \left.\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right|_{u=cte} - x_j \left.\frac{\partial x_i}{\partial y}\right|_{p=cte}$$

En caso que i=j se tiene

$$\left.\frac{\partial x_i}{\partial p_i}\right|_{y=cte} = \left.\frac{\partial x_i}{\partial p_i}\right|_{u=cte} - x_i \left.\frac{\partial x_i}{\partial y}\right|_{p=cte}$$

La teoría sólo nos dice es que el efecto sustitución es negativo. Podemos ilustrar gráficamente la ecuación de Slutzky para el caso n=2, i = j.

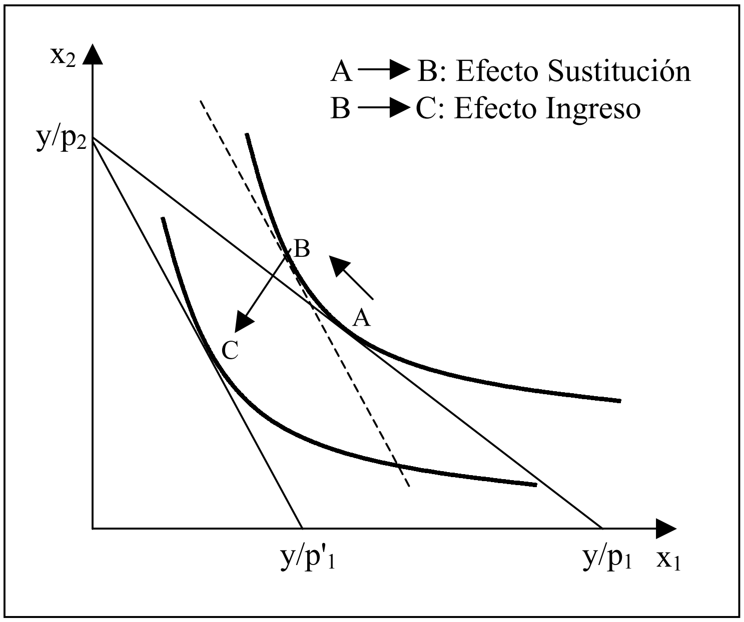

Fig. 4: Ecuación de Slutzky

La condición que el Hessiano de la función de gasto sea simétrico y semi-definido negativo es la única que impone la teoría del consumidor. Pero dado que la función de gasto no es observable pues depende de algo no visible como lo es la utilidad, esta condición no tendría sentido práctico si no fuera por la ecuación de Slutzky. Llamaremos matriz de Slutzky a aquella cuyo componente (i,j) está dado por la expresión anterior:

$$\left[\frac{\partial d^i}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial d_i}{\partial y}\right] = \left[\frac{\partial h_i}{\partial p_j}\right]$$

Luego cuando las funciones de demanda reprersentan preferencias racionales y localmente no saturadas, entonces son homogéneas de grado cero en los precios, cumplen la ley de Walras, y la matriz de Slutzky es simétrica y semi-definida positiva.

Integrabilidad

Se puede mostrar que cuando funciones de demanda cumplen las propiedades antes señaladas, entonces es posible construir preferencias a partir de las cuales son derivadas. Luego las propiedades anteriores son todas las que se derivan de la teoría de demanda basada en las preferencias. La importancia práctica de este resultado es que permite trabajar directamente con funciones de demanda sin necesidad de especificar una función de utilidad, pero verificando que cumpla las condiciones anteriores.

Prop.: Si las funciones de demanda son tales que la matriz de Slutzky es cóncava y semi-definida negativa, entonces existe una función de gasto de la cual estas funciones son derivadas.

Dem: Elijamos un punto cualquiera $x^0 = d(p^0, y^0)$ de la función de demanda a la cual se le asignas en forma arbitraria un valor u^0. Si existe una función de gasto $e(u^0, p)$ esa debe satisfacer las condiciones

$$\frac{\partial e(u,p)}{\partial p_i} = d^i(e(u,p),p) \qquad i = 1,\dots n$$

junto con la condición inicial $e(u^0, p^0) = y^0$

Por teorema de Frobenius, el sistema de ecuaciones anterior tiene solución sí y sólo sí:

$$\frac{\partial h^i}{\partial p_j} = \frac{\partial h^j}{\partial p_i}$$

pero esta última es una de las condiciones que debe cumplir la matriz de Slutzky. Luego resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene la solución para el nivel de utilidad u^0, que denotamos $e(u^0, p)$. Como además la matriz de Slutzky de las funciones de demanda es semi-definida negativa, entonces la función $e(u^0, p)$ es cóncava en los precios.

Para obtener una función $e(u, p)$ para los distintos niveles de utilidad, se puede definir, por ejemplo, $u = y$. Luego la condición inicial es $e(u, p^0) = u$, con lo cual $e(u, p)$ es creciente en p.

5. Bienes Normales, de Giffen, Complementarios y Sustitutos

En esta parte se discuten los signos de los efectos ingreso y sustitución. Comenzamos con el efecto ingreso. ¿Que sucede con el consumo de un determinado bien cuando aumenta el ingreso?

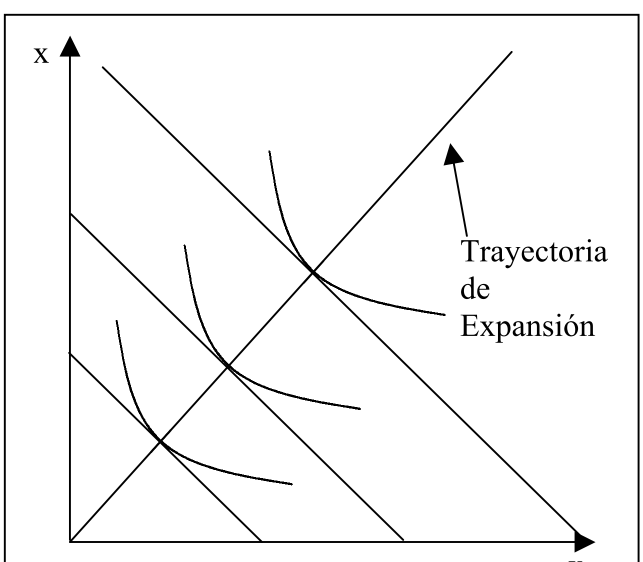

Fig. 5. Una trayectoria de Expansión

En general esperamos que un aumento del ingreso implique un crecimiento en el consumo de un bien. Por lo tanto si el consumo del bien *i* aumenta con el ingreso, entonces decimos que es normal, lo que escribimos

$$\frac{\partial x_i}{\partial y} > 0$$

Entre los bienes normales distinguimos los llamados bienes necesarios y aquellos conocidos como suntuarios. Se llama bien suntuario a aquel para el cual su elasticidad ingreso es mayor que uno, es decir cuando:

$$\frac{y}{x_i}\frac{\partial x_i}{\partial y} > 1$$

Aquellos bienes que no son normales se dicen inferiores, por ejemplo los cortes baratos de carne a partir de cierto nivel de ingreso. Todos los bienes son normales para algunos niveles de ingreso, pues es imposible que un bien sea inferior para todos los niveles de ingreso! Nótese que si se cumple ley de Walras, en una canasta de bienes al menos uno de ellos debe ser normal. En efecto

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial y} = 1$$

Como los precios son no negativos, de la igualdad anterior se desprende que al menos un bien debe ser normal.

Bien de Giffen. Como ya hemos visto $\partial h^i/\partial p_i$ es menor o igual a cero. Luego recordando la ecuación de Slutzky, si el bien es normal, la función de demanda tiene pendiente negativa. Aún en caso que el bien sea inferior lo más probable es que la demanda tenga pendiente negativa. Sólo si el efecto ingreso es negativo y grande con relación al efecto sustitución, la función de demanda tiene pendiente positiva. Se denomina bien de Giffen en un punto a aquel cuya demanda tiene pendiente positiva en ese punto.
Esto sólo se produce en situaciones extremas, recordemos que Marshall desarrolló toda su teoría de la demanda ignorando el efecto ingreso. El caso más típico de bien de Giffen se

da en situaciones de extrema pobreza. Supongamos que una familia gasta todo su ingreso en alimentos, entre los cuales destaca el pan, entonces si el pan es la forma más barata de obtener calorías un aumento en el precio del pan puede provocar un aumento en su consumo como única forma de mantener la ingesta calórica.

Bienes Complementarios y Sustitutos. La idea de bienes complementarios es de bienes que se consumen en forma conjunta. Por ejemplo, en el arriendo de canchas de tenis y la compra de pelotas de tenis. Si sube el arriendo de las canchas de tenis, que podemos suponer es un bien normal, entonces su demanda cae. Ahora como se trata de bienes de uso complementario podemos esperar una reducción en la compra de pelotas de tenis.

Def.: Dos bienes, i y j, se dicen complementarios sí,

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_j} = \frac{\partial h^j}{\partial p_i} \leq 0$$

Ahora:

$$\frac{\partial x^i}{\partial p_j} = \frac{\partial h^i}{\partial pj} - x_j \frac{\partial x^i}{\partial y}$$

Si los bienes i y j son complementarios y el bien i es normal entonces el efecto ingreso acentúa el efecto sustitución dado por $\partial h^i/\partial p_j$, por lo que:

$$\frac{\partial x^i}{\partial p_j} \leq 0$$

Si el bien i es inferior no podemos decir nada respecto al signo de la derivada anterior. Podría darse que para un par de bienes complementarios, es decir para los cuales se tiene $\partial h^i/\partial p_j$, la demanda de, digamos, el bien i aumentase al subir el precio del bien j. Para ello se requeriría que el bien j fuese inferior, de modo que si el efecto ingreso aumentase la demanda del bien j y también de su bien complementario i, de modo que en el caso del bien i el efecto ingreso superase el efecto sustitución. En todo caso, ésta parece más bien una posibilidad remota que difícilmente ocurrirá en la práctica.

Si dos bienes no son complementarios se dicen sustitutos. Si dos bienes son sustitutos y además el bien i es inferior, entonces

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} > 0$$

Consideremos un bien compuesto formado por todos aquellos distintos del bien j, entonces ambos son sustitutos entre sí, pues en una canasta de bienes siempre al menos uno debe ser sustituto de otro. Si aumenta el precio del bien analizado, entonces éste es sustituido por el bien compuesto. Entre los componentes del bien compuesto pueden haber diferentes movimientos.

6. Demanda agregada

La demanda agregada, se obtiene sumando las demandas individuales, es decir

$$D_i(y_1,\ldots,y_K,p)=\sum_{k=1}^{K} d_i^k(y_k,p)$$

donde d_i^k designa la demanda de la familia k por el bien i, D_i la demanda agregada por el bien i, y_k el ingreso de la familia k, y K el número de familias. Notar que la demanda agregada depende del ingreso total y de la distribución de éste entre los consumidores. Normalmente, por falta de información, en los estudios econométricos la demanda agregada se hace depender del ingreso promedio, pero claramente se trata de un supuesto fuerte.

Análogamente

$$H^i(u^1,\ldots,u^K,p)=\sum_{k=1}^{K} h^{ik}(u^k,p)$$

donde h^{ik} designa la demanda Hicksiana de la familia k por el bien i, H^i la demanda Hicksiana agregada por el bien i y u^k la utilidad de la familia k. Si los h^{ik} son cóncavos, H^i también lo es, por lo que las propiedades de la función agregada de demanda Hicksiana son las mismas que las de las funciones individuales.

7. Excedente del consumidor

A continuación se definen 3 medidas de cambio de bienestar y se establecen relaciones entre ellas.

Excedente del Consumidor

Se llama excedente del consumidor para el bien i el área comprendida entre la curva de demanda Marshalliana y la línea del precio, es decir a la expresión:

$$S=\int_{p_1^0}^{\infty} d^1(y^0,p_1)dp_1$$

la cual podemos representar con la figura siguiente, en la cual dado el precio p^0_i la persona consume x^0_i unidades del bien i.

La denominación excedente del consumidor se explica porque por la primera unidad del bien (pensemos en agua) el consumidor está dispuesto a pagar un precio elevado, por la siguiente algo menos, y así sucesivamente. Ahora la diferencia entre el precio p^0_i y lo que el consumidor estaría dispuesto a pagar por la primera unidad representa un excedente para éste, y asimismo para las unidades siguientes hasta llegar a x^0_1. En consecuencia, el área S representaría el excedente total del consumidor.

Desgraciadamente la historia anterior contiene un error. Si el consumidor pagase más de p^0_i por la primera unidad consumida esto reduciría el consumo del bien (efecto ingreso), el cual ya no sería igual a x^0_i, lo que invalida el análisis del párrafo anterior. De hecho el excedente del consumidor no tiene significado alguno en términos de utilidad, salvo cuando la utilidad marginal del ingreso es constante como se muestra más adelante.

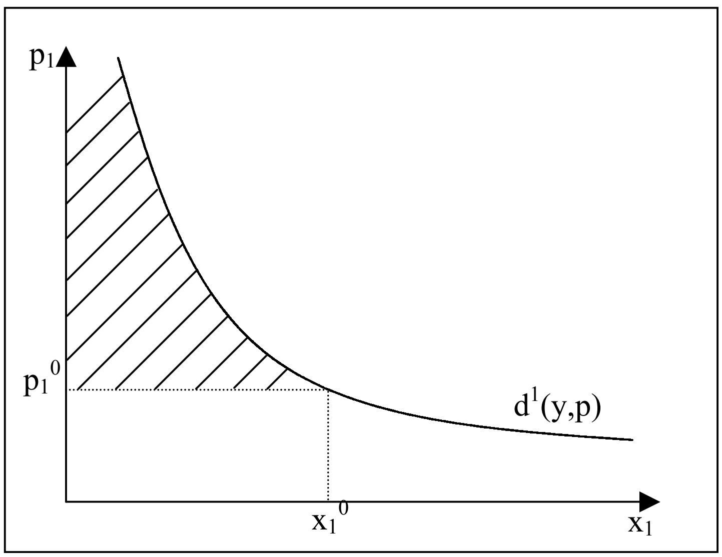

Fig. 6. Excedente del Consumidor.

Dado que el excedente del consumidor no tiene significado en términos de utilidad es necesario introducir nuevas definiciones.

Variación Compensatoria

La variación compensatoria C representa la variación en el ingreso de una persona que se requiere para mantener su nivel de utilidad constante cuando se produce un cambio en los precios.

En lo que sigue p^0 denota el vector inicial de precios, p^1 el nuevo vector de precios, y^0 el ingreso inicial, y^1 el nuevo ingreso, y u^o el nivel inicial de utilidad. Luego la variación compensatoria C debe satisfacer

$$u^0 = v(y^0, p^0) = v(y^0 + C, p^1)$$

Ahora se tiene que

$$y^0 = e(u^0, p^0)$$

$$y^0 + C = e(u^0, p^1)$$

por lo que

$$C = e(u^0, p^1) - e(u^0, p^0)$$

Si la situación de un individuo pasa desde (y^0, p^0) a (y^1, p^1), entonces su utilidad habrá aumentado sí y sólo sí $y^1 - y^0 \geq C$

Variación Equivalente

La variación equivalente (E) representa la disminución en el ingreso del individuo que se requiere para tener a precios p^0 el nivel hipotético de utilidad que se tendría con precios p^1 e ingreso y^0, es decir E satisface:

$$u^h = v(y^0, p^1) = v(y^0 - E, p^0)$$

Luego $y^0 = e(u^h, p^1)$ e $y^0 - E = e(u^h, p^0)$, por lo que $E = e(u^h, p^1) - e(u^h, p^0)$.

En lo que sigue supondremos que p^0 y p^1 sólo difieren en su primer componente. En consecuencia

$$p^0 = (p^o{}_1, p^o{}_2, \ldots, p^o{}_n)$$

$$p^1 = (p^1{}_1, p^o{}_2, \ldots, p^o{}_n)$$

Consideremos el caso $p^1{}_1 > p^0{}_1$, entonces

$$C = e(u^0, p^1) - e(u^0, p^0)$$

$$C = \int_{p_1^0}^{p_1^1} \frac{\partial e}{\partial p_1}(u^0, p_1, p_2^0, \ldots, p_n^o)dp_1$$

$$C = \int_{p_1^0}^{p_1^1} h^1(u^0, p)dp_1$$

Del mismo modo

$$E = \int_{p_1^0}^{p_1^1} h^1(u^h, p)dp_1$$

Gráficamente

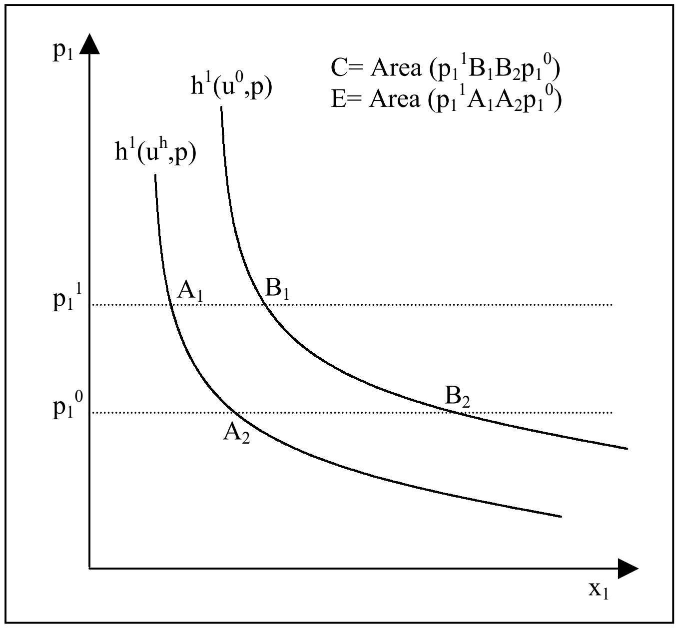

Fig. 7. Variación Compensatoria y Variación Equivalente

Para cualquier p

$$h^1(u^0, p) = d^1(e(u^0, p), p)$$

$$h^1(u^h, p) = d^1(e(u^h, p), p)$$

Si $p^1{}_1 > p^0{}_1$, entonces $u^0 > u^h$, luego $e(u^0, p) > e(u^h, p)$ y si el bien x^1 es normal, entonces para todo p se tiene que:

$$h^1(u^0, p) > h^1(u^h, p)$$

Por lo tanto si el bien 1 es normal la curva $h(u^0, p)$ está por encima de la curva $h(u^h, p)$.

El problema con las definiciones de variación compensatoria y equivalente es que ocupan las funciones de demanda Hicksianas las cuales no son observables, por ello en la práctica se recurre el excedente del consumidor, que si bien no es una medida de utilidad en muchos casos es una buena aproximación de la variación compensatoria [ver Willig].

En todo caso la caída en el excedente del consumidor producto del aumento en el precio del producto uno está dada por la siguiente expresión:

$$\Delta S = \int_{p_1^0}^{p_1^1} d^1(y,p)dp_1$$

Expresión que podemos representar en la siguiente figura:

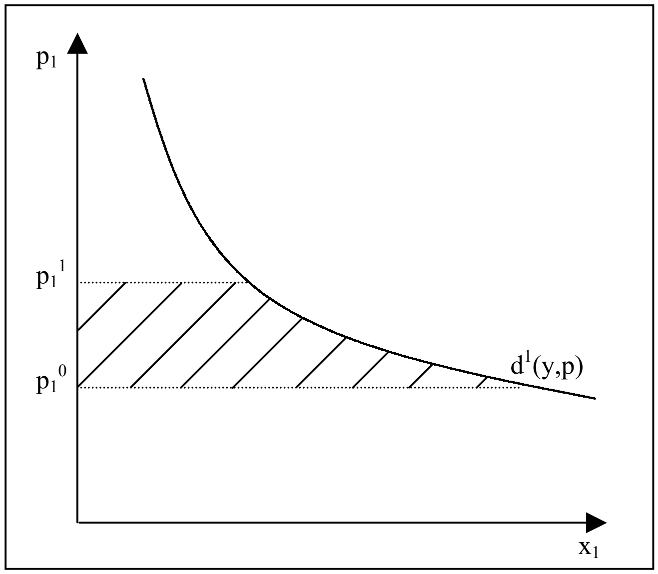

Fig. 8: Variación en el Excedente del Consumidor

Además se tiene que el cambio en el excedente del consumidor está contenido entre la variación compensatoria y la variación equivalente como se ilustra en la Figura 9.

Nótese que: $h^1(u^h, p^1) = d^1(e(u^h, p^1), p^1) = d^1(y^0, p^1)$

$h^1(u^0, p^0) = d^1(e(u^0, p^0), p^0) = d^1(y^0, p^0)$

Finalmente mostramos que el excedente del consumidor es una medida rigurosa de bienestar sólo cuando la utilidad marginal del ingreso es constante.

Proposición: El excedente del consumidor tiene relación directa con la utilidad sólo si la utilidad marginal del ingreso es constante.

Dem.:

$$\Delta S = \int_{p_1^0}^{p_1^1} d^1(y^o, p)dp_1$$

Usando la identidad de Roy se obtiene

$$S = \int_{p_1^0}^{p_1^1} \frac{\partial v(y^0, p)}{\partial p_1} \left(\frac{\partial v(y^0, p^0)}{\partial y} \right)^{-1} dp_1$$

$$S = [v(y^0, p^0) - v(y^0, p^1)] \left(\frac{\partial v(y^0, p^0)}{\partial y} \right)^{-1}$$

lo que completa la demostración.

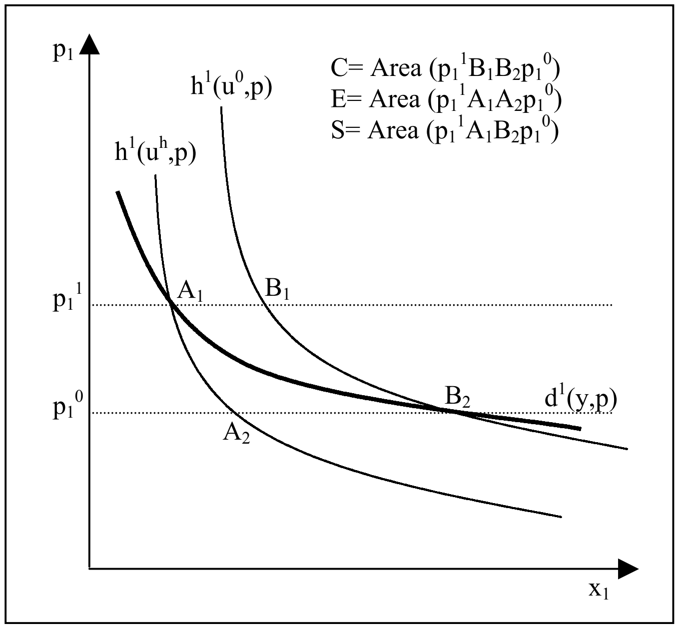

Fig. 9: Relación entre Medidas de Cambio de Bienestar

En la práctica es difícil esperar que la utilidad marginal del ingreso sea constante. El siguiente ejemplo ilustra cuanto difiere el excedente del consumidor de la variación compensatoria, que es la medida correcta de cambio de bienestar.

Ejemplo: Supongamos las preferencias de un consumidor están representadas por la siguiente función de utilidad:

$$u(x_1,x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

Las demandas Marshallianas entonces están dadas por

$$d^1 = \frac{\alpha\, y}{(\alpha + \beta)\, p_1}$$

y

$$d^2 = \frac{\beta\, y}{(\alpha+\beta)\, p_2}$$

Luego la función indirecta de utilidad está dada por:

$$v(y,p) = \left(\frac{\alpha\, y}{(\alpha+\beta)\, p_1} \right)^{\alpha} \left(\frac{\beta\, y}{(\alpha+\beta)\, p_2} \right)^{\beta}$$

que podemos reescribir

$$v(y,p) = \frac{\gamma\, y^{\alpha+\beta}}{p_1^{\alpha}\, p_2^{\beta}}$$

donde

$$\gamma = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta} \right)^{\beta}$$

luego la función de gasto está dada por:

$$e(u,p) = \left(\frac{u\, p_1^{\alpha}\, p_2^{\beta}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Queremos medir cuánto está dispuesto a pagar el consumidor por reducir de $p^0{}_1$ a $p^1{}_1$ el precio del primer producto. Dicho de otro modo ¿Cuánto pagaría por entrar a un lugar donde el bien 1 se vende a $p^1{}_1$ en vez de $p^0{}_1$? El consumidor está dispuesto a pagar la cantidad C que se obtiene de la siguiente igualdad

$$C = e(u^0,p^0) - e(u^0 ,p^1)$$

donde

$$u^0 = v(y^0,p^0)$$

Luego

$$C = y^0 - y^0 \left(\frac{p_1^1}{p_1^0} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

Por otro lado el cambio en el excedente del consumidor que produce una baja en el precio del bien 1 desde $p^0{}_1$ a $p^1{}_1$

$$S = \int_{p_1^1}^{p_1^0} \frac{\alpha\, y^0}{(\alpha+\beta)} dp_1 = \frac{\alpha y^0}{\alpha+\beta}[\log\ p_1^0 - \log\ p_1^1] = y^o \log\left(\frac{p_1^0}{p_1^1}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

lo cual demuestra que el excedente del consumidor es sólo una medida aproximada del cambio en la utilidad.

7. Indices de costo de vida

Existen diversos índices de costo de vida. Los dos más usados son los de Laspayres (L) y Paasche (P), los cuales están dados por las siguientes expresiones:

$$L = \frac{p^1 x^0}{p^0 x^0}$$

$$P = \frac{p^1 x^1}{p^0 x^1}$$

donde x^0 denota la canasta inicial cuando los precios están dados por p^0, y x^1 la canasta cuando los precios están dados por p^1. Si a un individuo se le aumenta su ingreso de acuerdo al índice de Laspayres, esto le permitiría comprar la antigua canasta a los nuevos precios. Sin embargo, si los precios relativos cambian, el consumidor, en general, podrá aumentar el nivel de su utilidad variando la composición de su canasta. Por esta razón L en general sobreestima el alza del costo de vida, en cambio --por un razonamiento análogo-- el índice de Paasche lo subestima. El verdadero índice debiera estar dado por:

$$I = \frac{e(u^0, p^1)}{e(u^0, p^0)}$$

donde $u^0 = y(y^0, p^0)$.

El problema es que el verdadero índice no puede ser calculado porque depende de las utilidades del individuo, las cuales no son observables. El índice de Laspayres, sin embargo, coincide con el índice verdadero si las funciones de utilidad son homogéneas de grado uno. Hay que recordar además que los índices de costos de vida oficiales se obtienen para "individuos promedios".

9. <u>Preferencias Reveladas</u>.

¿ Es posible construir una función de utilidad a partir de una serie de observaciones de la canasta de compras que hace un consumidor? La respuesta es si, siempre y cuando se cumplan ciertos requisitos. En efecto, si se satisface el axioma de preferencias reveladas, entonces es posible deducir una función de utilidad que sea consistente con el comportamiento del individuo.

Tomemos un conjunto de observaciones (p^i, x^i), donde el consumidor compra una canasta x^i cuando la lista de precios es p^i. Es decir a precios pi el consumidor maximiza su utilidad comprando la canasta x^i.

<u>Prop</u>: (Axioma débil de preferencias reveladas). Si se cumple que:

$$(i) \quad p^a x^b \leq p^a x^a$$
$$(ii) \quad p^b x^a \leq p^b x^b$$

entonces

$$p^a x^b = p^a x^a$$
$$p^b x^a = p^b x^b$$

<u>Dem</u>: a.- A precios p^a es posible consumir la canasta x^b, luego.

$$x^a \geq x^b$$

b.- del mismo modo a precios p^b es posible consumir la canasta x^a, luego.

$$x^b \geq x^a$$

c.- concluimos que

$$x^a \approx x^b$$

d.- ahora si $p^a x^b < p^a x^a$, entonces el consumidor podría comprar la canasta x^b que es tan buena como x^a y le quedaría ingreso para aumentar el consumo de uno o varios bienes. Si esto es posible, y bajo el axioma de no saturación local, x^a no puede maximizar la utilidad. Debe tenerse que:

$$p^a x^b = p^a x^a$$

No es posible construir una función de utilidad si las funciones de demanda sólo satisfacen el axioma débil de preferencias reveladas. En efecto, se requiere un axioma más fuerte conocido como axioma fuerte de preferencias reveladas.

Prop.: (Axioma Fuerte de Preferencias Reveladas) Dada cualquier cadena posible de canastas y vectores de precios, si se tiene que

$$
\begin{array}{ll}
p^a x^b \leq p^a x^a \\
p^b x^c \leq p^b x^b \\
. & . \\
. & . \\
. & . \\
p^z x^a \leq p^z x^z
\end{array}
$$

entonces las ecuaciones anteriores se cumplen como igualdades.

Teor.: (Afriat) Si nuestras observaciones satisfacen el axioma fuerte de preferencias reveladas, entonces es posible encontrar una función de utilidad no trivial que haya dado origen a esas observaciones.

Dem.: No se entrega una demostración formal, sólo se hacen algunas indicaciones de la manera de llevarla a cabo. La función tiene la forma

$$u(X) = Min[\phi_1 + \mu_1 p^1 (x - x^1), \ldots, \phi_k + \mu_k p^k (x - x^k)]$$

donde los parámetros ϕ_i, μ_i i = 1, ... ,k deben ser elegidos de manera que

$$\phi_j \leq \phi_i + \mu_i p^i (x^j - x^i) \quad i, j = 1, \ldots, k; \mu_i \geq 1$$

con lo que se tiene:

$$u(x^j) = \phi_j$$

Además sea x cualquier canasta que satisface la restricción de presupuesto cuando los precios son pj, entonces.

$$u(x) = \phi_j + \mu_j p^j (x - x^j) \leq \phi_j$$

luego x^j maximiza u(x) cuando los precios son p^j.

Lo que no es fácil demostrar es que existan los ϕ_j y los μj, que satisfagan las propiedades señaladas.