1.- TEORIA DE LA PRODUCCION

En estas notas se supone que los insumos que intervienen en el proceso de producción son medibles cardinalmente. Otros factores, como la moral de la fuerza de trabajo o la información, que también afectan al proceso de producción, pero que no son medibles cardinalmente, son tomados como parámetros. Asimismo, es necesario tener presente que la producción no es un nivel sino que está referida al tiempo.

En lo que sigue supondremos que hay **n** insumos que designamos $x_1,......, x_n$, y **m** productos que denotamos $q_1,....,q_m$. Un proceso productivo determinado puede ser visto como posible o imposible. T designará al conjunto de producciones posibles dada la tecnología existente, o sea (x, q) está en T si es un par tecnológicamente posible. Por cierto que el conjunto T se modifica con el avance tecnológico.

En lo que sigue analizamos algunos axiomas útiles para caracterizar la tecnología.

1.1 Axiomas

a) **Posibilidad de inacción:** El par (0,0) pertenece al conjunto T.

b) **Disponibilidad sin costo**: Sea (x, q) en T, si $x^1 \geq x$, y $q^1 \leq q$, entonces $(x^1,q^1) \in T$.

c) **Imposibilidad de obtener algo de nada:** Si $(0, q) \in T$, entonces q = 0.

d) **Acotamiento:** Existe $\beta > 0$ tal que $PqP \leq \beta PxP$ para cualquier par (x, q), donde PPes alguna norma.

e) **T es cerrado.** Luego para toda sucesión (x^s, q^s) en T, si $x^s \to x^*$ y $q^s \to q^*$, entonces $(x^*, q^*) \in T$.

f) **Aditividad**: Si (x^a, q^a) y (x^b, q^b) están en T, entonces $(x^a+ x^b, q^a + q^b)$ pertenece a T.

g) **Divisibilidad**: Si $(x, q) \in T$, entonces $(\alpha x, \alpha q) \in T$ para cualquier α en [0, 1].

h) **T es cuasi-convexo**: Si los pares (x, q) y (x^1, q) pertenecen al conjunto T, entonces $(\sigma x+(1-\sigma)x^1, q)$ también está en T para cualquier $0 \leq \sigma \leq 1$. O dicho de otro modo, el conjunto de los x tal que (x, q) pertenece a T es convexo para todo q.

i) **T es un convexo**. Es decir, si los pares (x^a, q^a) y (x^b, q^b) pertenecen al conjunto T, entonces $(\sigma x^a+(1-\sigma)x^b, \sigma q^a+(1-\sigma)q^b)$ también está en T, para cualquier $0 \leq \sigma \leq 1$.

Comentarios

(i) La posibilidad de inacción indica que no existen hundidos. Es decir, que no se han tomado decisiones de producción que son irrevocables.

(ii) Disponibilidad sin costo refleja la idea que siempre es posible absorber más insumos sin disminuir la producción.

(iii) El axioma de acotamiento implica al de imposibilidad de producir algo de la nada. El axioma de acotamiento también elimina la posibilidad de tener productividades marginales infinitas como se ilustra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo: n = 1, m = 1, $q = \notin x$. Si se cumple el axioma de acotamiento $PxP \leq \beta PxP$, luego $\notin x \leq \beta x$. Por lo tanto $\beta \geq 1 / \notin x$, y cuando $x \to 0$, $\beta \to \infty$.

(iv) El axioma de aditividad descarta la posibilidad de que existan externalidades negativas, así como la existencia de rendimientos decrecientes a escala.

(iv) El axioma de divisibilidad indica rendimientos no-crecientes a escala, dado que cualquier proceso productivo se puede replicar a una escala menor.

(v) Cuasiconvexidad por su parte expresa la idea que la diversidad en los insumos es positiva, o dicho de otro modo que las combinaciones balanceadas de insumos son mejores (En estricto rigor cuasiconvexidad implica "algo" más).

(vi) Por su parte convexidad agrega a la idea anterior el concepto de rendimientos no-crecientes a escala. Es decir, el axioma de convexidad implica los axiomas de cuasiconvexidad y divisibilidad, lo cual es muy fácil de probar. La figura 1.a ilustra una tecnología que no es convexa pero si es cuasiconvexa, y la figura 1.b una tecnología que no es cuasi-convexa .

(vii) A grandes rasgos, las tecnologías T cumplen los 5 primeros axiomas. Los 4 siguientes son más restrictivos, pero en general la teoría no los requiere. Sin embargo, muchos desarrollo teóricos se simplifican si se supone que la tecnología es cuasi-convexa.

Prop. 1: Si se cumplen los axiomas de aditividad y divisibilidad, entonces el conjunto T es un cono convexo.

Dem.: *T es un cono.* Debemos probar que si $(x, q) \in T$, entonces $(\alpha x, \alpha q) \in T$ para cualquier $\alpha \geq 0$. Podemos escribir $\alpha = n+\beta$ donde n es el mayor entero contenido en α, por lo que $0 \leq \beta \leq 1$. Por divisibilidad $(\beta x, \beta q) \in T$, por aditividad $(x+x+....+x+\beta x, q+q+....+\beta q) \in T$.

T es convexo. Sean (x^a,q^a) y (x^b,q^b) dos pares en T, $0 \leq \sigma \leq 1$. Como $(x^a,q^a) \in T$, entonces por axioma de divisibilidad $(\sigma x^a,\sigma q^a) \in T$, por igual razón $((1-\sigma)x^b, (1-\sigma)q^b) \in T$. Finalmente por aditividad $(\sigma x^a+(1-\sigma)x^b, \sigma q^a+(1-\sigma)q^b) \in T$, para cualquier $0 \leq \sigma \leq 1$.

Luego los axiomas de aditividad y divisibilidad conjuntamente implican que la tecnología presenta retornos constantes a escala.

1.2 Función de Producción

En lo que sigue restringimos el análisis a industrias monoproductoras, es decir, a aquellas para las cuales q es escalar.

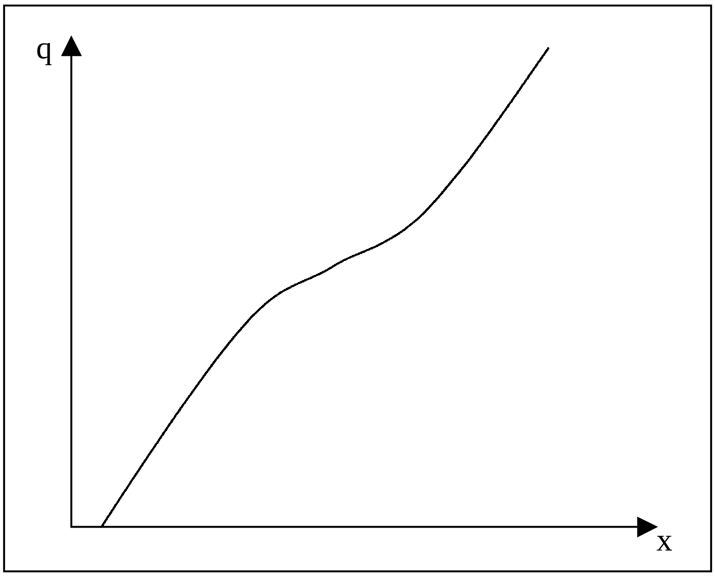

Figura 1: Tecnología cuasi-convexa

Def.: La función de producción f( ) asocia a cada vector x la mayor producción que es posible obtener a partir del vector de insumos x, es decir:

$$f(x) = \underset{q}{\mathrm{Max}}\{q \mid (x, q) \in T\}$$

La función de producción corresponde a la frontera "superior" del conjunto de tecnologías posibles T.

Prop. 2: Si la tecnología cumple los axiomas de inacción, disponibilidad sin costo, acotamiento y T es un conjunto cerrado, entonces la función f está bien definida.

Dem.: Se define el conjunto $Q_x = \{q \mid (x, q) \in T\}$. Para probar el resultado es necesario mostrar que Q_x es no vacío y compacto. Por axioma de inacción (0, 0) está en T. Además, por axioma de disponibilidad sin costo (x, 0) también está en T, por lo que el conjunto Q_x no es vacío. El axioma de acotamiento implica que Q_x es acotado, y Q_x es cerrado porque T lo es. Luego Q_x es un compacto.

Prop. 3: Si la función de producción cumple el axioma de convexidad, entonces la función de producción es cóncava.

Dem.: Necesitamos probar que $f(\alpha x+(1-\alpha)x^1) \geq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(x^1)$. Como $(x, f(x))$ y $(x^1, f(x^1))$ están en T, $(\alpha x+(1-\alpha)x^1, \alpha f(x)+(1-\alpha)f(x^1))$ también pertenece a T por axioma de convexidad. El resultado se sigue de la definición de la función de producción.

Conjetura: *Si la función de producción está bien definida y además se cumple el axioma de cuasiconvexidad, entonces la función de producción es continua.*

Def.: Sea A un conjunto convexo en R^n, una función $f : A \rightarrow R$ se dice cuasicóncava si el conjunto:

$$Q_q = \{ x \in A \mid f(x) \geq q \}$$

es convexo para cualquier q.

Es fácil ver que si n = 1 y la función f es continua, entonces es cuasicóncava si y sólo si $f'(x)$ es no decreciente para todo x en A. En consecuencia, es simple encontrar una función cuasicóncava que no sea cóncava.

Prop. 4: Toda función cóncava es cuasicóncava.

Dem.: Sean **x** e **y** dos elementos en Q_q, es decir $f(x) \geq q$ y $f(y) \geq q$. Luego por concavidad de f $f(\alpha x+(1-\alpha)y) \geq q$. Por lo tanto $\alpha x+(1-\alpha)y$ también está en Q_q, para todo $0 \leq \alpha \leq 1$.

Prop. 5: Si la función de producción está bien definida y la tecnologíia cumple el axioma de cuasiconvexidad, entonces la función de producción es cuasicóncava.

Dem.: Consideremos **x** e **y** dos elementos en el conjunto Q_q, luego por disponibilidad sin costo (x, q) e (y, q) están en T, por axioma de cuasiconvexidad $(\alpha x+(1-\alpha)y, q)$ también está en el conjunto T, por lo que $\alpha x+(1-\alpha)y$ pertenece a Q_q.

Prop. 6: Si la función de producción está bien definida y además se cumplen los axiomas de aditividad y divisibilidad, entones es homogénea de grado uno.

Dem.: Para demostrar que la función de producción es homogénea de grado uno hay que probar que para cualquier α, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$. Como $(x, f(x)) \in T$, por proposición 1 se tiene que $(\alpha x, \alpha f(x)) \in T$, para cualquier $0 \leq \alpha \leq 1$, luego $f(\alpha x) \geq \alpha f(x)$.

Definiendo $x^1 = \alpha x$, se tiene que $(x^1, f(x^1)) \in T$. Luego $(x^1/\alpha, f(x^1)/\alpha) \in T$, por lo que $f(x^1/\alpha) \geq f(x^1)/\alpha$. Luego $f(x) \geq f(\alpha x)/\alpha$, de donde se sigue que $f(\alpha x) \leq \alpha f(x)$.

La interpretación económica de una función de producción homogénea de grado uno es retornos constantes a escala. Una función de producción cuasi-cóncava expresa la idea que las combinaciones balanceadas de insumos son mejores. La concavidad de la función de producción agrega la idea que los retornos a escala no son crecientes.

1.3 Isocuantas de producción

Def.: Llamaremos isocuanta de producción a la frontera del conjunto Q_q, es decir al conjunto $\{x \mid f(x) = q\}$

Si para cualquier punto $(x_1, x_2,....., x_{n-1})$ en R^{n-1} existe una única solución para la igualdad $f(x_1,.......,x_n) = q^0$, ésta define implicitamente a x_n como función de $x_1, x_2,....x_{n-1}$. Podemos llamar h a la función de R^{n-1} en R así definida, entonces $x_n = h(x_1, x_2,....., x_{n-1})$ satisface

$$f(x_1, x_2, ... , x_{n-1}, h(x_1, x_2, ..., x_{n-1})) = q^0$$

Prop. 7: Si la función de producción es cuasi-cóncava, entonces la función h es convexa.

Dem.: Sean x^1- y x^2- dos elementos cualesquiera en el dominio de h. Debemos mostrar que

$$h(\alpha x^1\text{-} + (1-\alpha)x^2\text{-}) \leq \alpha h(x^1\text{-}) + (1-\alpha)h(x^2\text{-}), \text{ para cualquier } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Por definición de h se tiene que $f(x^i\text{-}, h(x^i\text{-})) = q^0$, i = 1, 2. Dada la cuasiconcavidad de la tecnología

$$f(\alpha x^1\text{-} + (1-\alpha)x^2\text{-}, \alpha h(x^1\text{-}) + (1-\alpha)h(x^2\text{-})) \geq q^0$$

de donde se deduce, recordando que la productividad marginal es positiva, que

$$\alpha h(x^1\text{-}) + (1-\alpha)h(x^2\text{-}) \geq h(\alpha x^1\text{-} + (1-\alpha)x^2\text{-}).$$

Luego cuando la tecnología es cuasicóncava las isocuantas de producción son convexas, tal como son dibujadas en los libros de texto. Si además suponemos que se cumple el axioma de disponibilidad sin costo, entonces las isocuantas no se cruzan y en la medida que el nivel de producción sea mayor están más distantes del origen.

1.4 Tasa Marginal de Sustitución Técnica

Def. La Tasa Marginal de Sustitución Técnica (TMST) entre dos factores mide en cuantas unidades se debe aumentar el uso de un factor, si se quiere mantener la producción constante cuando la disponibilidad del otro factor disminuye en una unidad.

En esta definición se consideran sólo 2 factores productivos, los otros se pueden suponer constantes. Entonces escribiremos la isocuanta $f(x_1, x_2) = q^0$, la cual define implícitamente a x_2 como función de x_1, es decir $x_2 = h(x_1)$ donde $f(x_1, h(x_1)) = q^0$. Entonces la TMST está dada por:

$$TMST = \frac{dx_2}{dx_1} = h'(x_1)$$

Por lo cual la TMST es igual a la pendiente de la isocuanta.

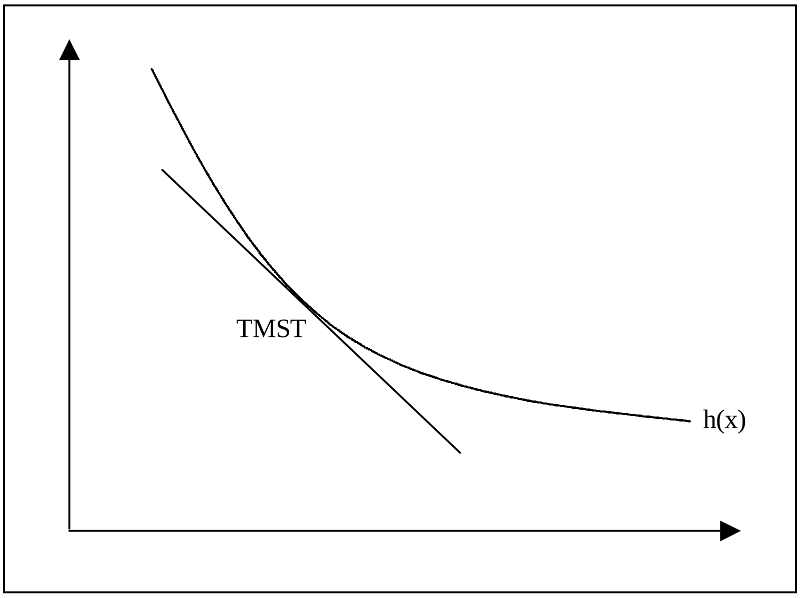

Figura Nº 2:Tasa Marginal de Sustitución Técnica

Si la función f es cuasicóncava, entonces la función h es convexa (h''≥ 0). Lo cual implica que a medida que disminuye la cantidad disponible del factor 1 se necesitan más unidades del factor 2 para sustituir una unidad del bien 1. En resumen, tecnología cuasiconvexa implica que es difícil sustituir un factor cuando este es escaso, y en este caso las isocuantas tienen la forma con la que tradicionalmente se las dibuja en los libros de texto.

1.3 Productividad Marginal

La curva de producción total para un insumo, se obtiene fijando todos los factores menos uno, digamos el primero. Entonces la curva de producción total del insumo 1 está dada por:

$$t_1(x_1) = f(x_1, x_2^0, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n^0)$$

donde x_i^0 representa el nivel fijo del insumo i, $i \geq 2$.

La curva de producción total de un insumo determinado es cóncava cuando la tecnología exhibe retornos constantes a escala.

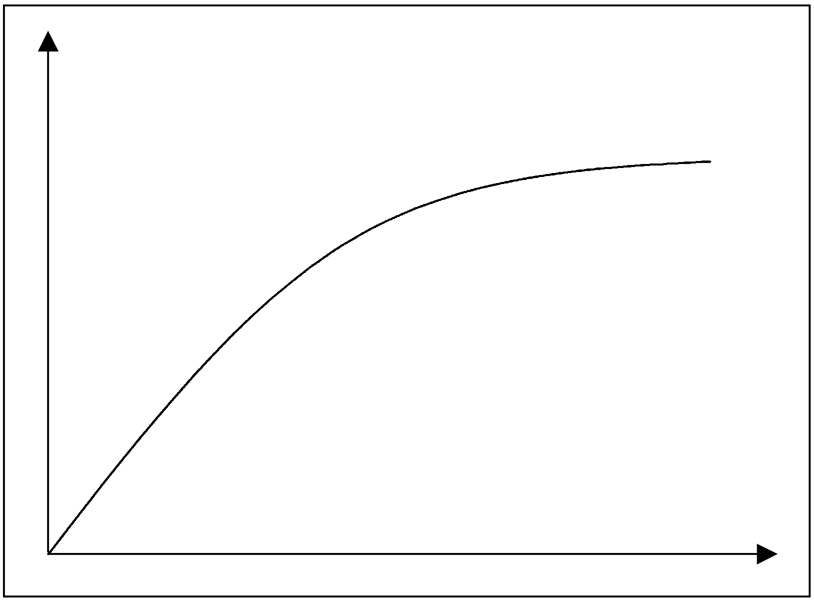

Figura 2: Curva de Producción Total Bien 1

Def.: Se llama productvidad marginal del insumo i (PM_i) a la pendiente de la curva de producción total de dicho insumo, es decir

$$PM_i(x_i) = \frac{dq}{dx_i} = t_i^{'}(x_i)$$

donde $q = f(x_1^0, x_2^0, .., x_i, ..., x_n^0)$.

Prop. 8: Si se cumple el axioma de disponibilidad sin costo, la productividad marginal es creciente, es decir, la pendiente de la curva de producción total es positiva.

Dem.: $q + Aq = f(x_1 + Ax_1, x_2^0, ..., x_n^0)$

Si $Ax_1 > 0$, el axioma de disponibilidad sin costo implica que $Aq \geq 0$, de donde se sigue que:

$$f_1 = t_1^{'}(x_1) = \lim_{\Delta_1 \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta x_1} \geq 0$$

donde f_i denota la derivada de la función f con respecto al argumento i.

Usando la definición de productividad marginal podemos encontrar una forma de determinar la TMST usando la función de producción. Por teorema de la derivada implícita se tiene $f(x_1, h(x_1)) = q^0$, de donde se sigue que $f_1 + f_2 h' = 0$, luego recordando que $f_i \geq 0$, se tiene que:

$$TMST = \frac{f_1}{f_2}$$