UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL

IN 56B INGENIERIA DE FINANZAS

GUIA CONTROL No 2

Profesor: Viviana Fernández
Auxiliar: Pablo Toro

1) Se ha sugerido que la tasa de interés de corto plazo, r, sigue el siguiente proceso estocástico:

$$dr_t = a\,(b - r_t)dt + r_t\, c\, dW_t$$

donde a, b y son constantes positivas y dW_t es el incremento de un proceso Wiener. Suponga que a=0.4, b=0.1, c=0.15 y r_0=20%. Describa este proceso.

2) Suponga el modelo de Vasicek para la tasa de corto plazo, $dr_t = 0.4\,(0.1-r_t)dt + 0.15dW_t$, con r_0=5% anual. Caracterice la estructura de tasas de interés, en términos anuales. ¿Cuál es la tasa *forward* entre t=1 y t=2 años?

3) Suponga que a=0.1 y b=0.1 en los modelos de Vasicek y Cox-Ingersoll-Ross. Para ambos modelos, la tasa de interés de corto plazo inicial es 10% y la desviación estándar del cambio en la tasa corta, en un intervalo Δt, es $0.02\sqrt{\Delta t}$. Compare los precios dados por ambos modelos para un bono cero-cupón que vence en 10 años.

4) Suponga que a=0.05, b=0.08, y $\sigma = 0.015$ en el modelo de Vasicek, con una tasa de interés inicial de 5%. Calcule el precio de una *put* europea a 1 año en un bono cero-cupón que madura en tres años. El valor cara del bono es $100 y el precio de ejercicio de la opción es $87. Compruebe que se satisface la paridad *put-call.*

5) Sean r_1 y r_2 los retornos de dos activos, con $E(r_1)=0.03$ y $E(r_2)=0.08$, $Var(r_1)=0.02$, $Var(r_2)=0.05$, y $Cov(r_1,r_2)= -0.01$.

a) Grafique el *set* de combinaciones posibles de media-varianza, suponiendo que estos dos activos son los únicos disponibles.
b) Si usted deseara minimizar el riesgo, ¿cuanto invertiría en el activo 1?
c) ¿Cuál es la covarianza entre el portafolio de mínima varianza y cualquier otro portafolio en el *set* de mínima varianza?

6) Existen tres activos en la economía con retornos r_1, r_2 y r_3, respectivamente. La matriz varianza-covarianza y los retornos esperados son, respectivamente:

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad e = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.8 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

(a) Encuentre el *set* de mínima varianza.
(b) Encuentre el portafolio de mínima varianza.
(c) Si la tasa libre de riesgo es r_f=0.2, encuentre el portafolio de mercado.

7) Considere una posición consistente de \$100 mil en el activo A y de \$100 mil en el activo B. Suponga que las volatilidades diarias de ambos activos son 1% y que el coeficiente de correlación entre los retornos es 0.3. ¿Cuál es el VaR a 5 días para un nivel de confianza del 95%? ¿Cuál es la ganancia por diversificación?

8) Suponga que en una economía usted puede representar el retorno de acciones de acuerdo a la relación:

$$\tilde{R}_i = \alpha_i + \beta_i \cdot \tilde{R}_m + \tilde{\varepsilon}_i$$

donde R_m es el retorno del índice o cartera de mercado con varianza $\sigma^2{}_m$, y ε_i es un error específico de la acción i, tal que:

$$E(\tilde{\varepsilon}_i) = 0 \qquad E(\tilde{\varepsilon}_i \cdot \tilde{R}_m) = 0 \qquad E(\tilde{\varepsilon}_i \cdot \tilde{\varepsilon}_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ \sigma^2_{\varepsilon_i} & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

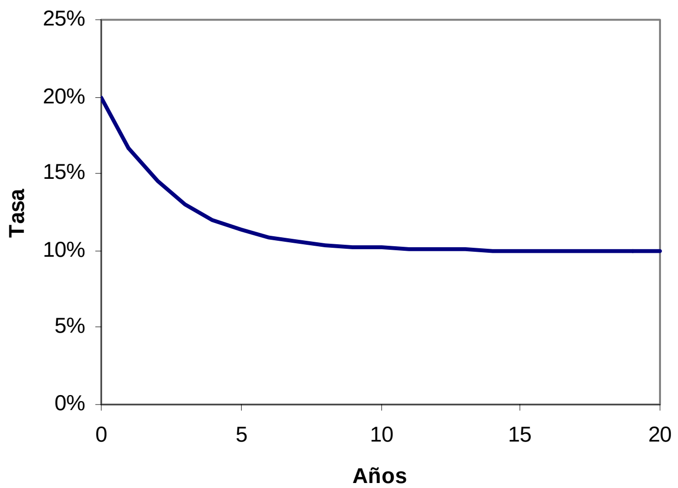
a) Determine una expresión analítica para el VaR de una cartera $\omega=(\omega_1,...,\omega_n)$ de acciones.
b) Analice y discuta el valor límite del VaR cuando n es muy grande. (*Hint*: suponga una cartera bien diversificada es decir donde ω_i se asemeja mucho a 1/n).

Respuestas a ejercicios seleccionados

1) Si sólo consideramos la parte determinística del model, $dr_t=a(b-r_t)dt$, tenemos que la tasa de interés converge al nivel de largo plazo de 10% anual, al cabo de 20 años, empezando en un nivel de 20%:

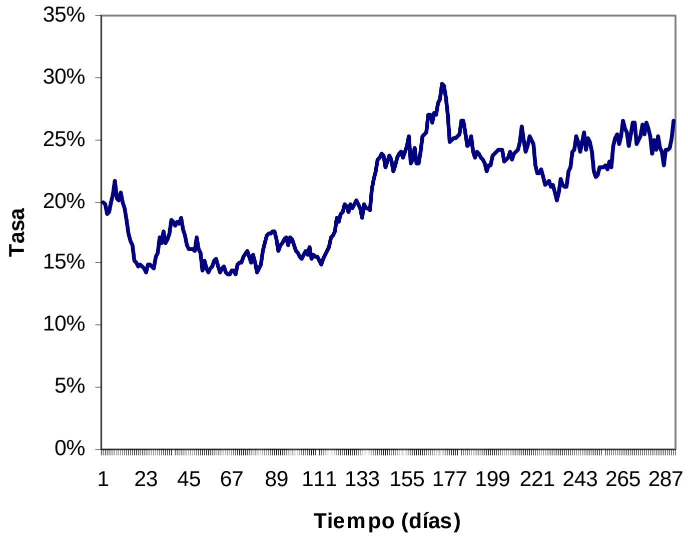
Tiempo (años)	r
0	0.2000
1	0.1670
2	0.1449
3	0.1301
4	0.1202
5	0.1135
6	0.1091
7	0.1061
8	0.1041
9	0.1027
10	0.1018
11	0.1012
12	0.1008
13	0.1006
14	0.1004
15	0.1002
16	0.1002
17	0.1001
18	0.1001
19	0.1001
20	0.1000

En particular, el parámetro a=0.4 indica que la brecha entre el nivel actual de la tasa y el de largo plazo se reduce en un 40% por año.



Para simular el proceso, el cual incluye la parte estocástica asociada al proceso Wiener, lo discretizamos :

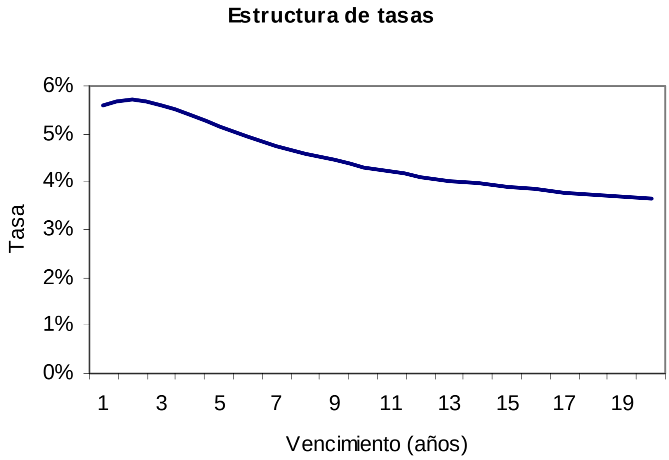
$$r_{t+\Delta t} = r_t + a(b - r_t)\Delta t + r_t c\xi\sqrt{\Delta t}$$, donde ξ~N(0,1), Δt=1/250 años (=1 día)



2) Se tiene que $R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln A(t,T) + \frac{1}{T-t}B(t,T)r(t)$, donde $B(t,T) = \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}$,

$A(t,T) = \exp\left(\frac{(B(t,T)-T+t)(a^2b-\sigma^2/2)}{a^2} - \frac{\sigma^2 B(t,T)^2}{4a}\right)$. Sea t=0, entonces:

T (años)	B(0,T)	A(0,T)	R(0,T)	r(0)
1	0.824	0.985	5.60%	5.00%
2	1.377	0.956	5.70%	5.00%
3	1.747	0.923	5.58%	5.00%
4	1.995	0.891	5.38%	5.00%
5	2.162	0.861	5.16%	5.00%
6	2.273	0.833	4.95%	5.00%
7	2.348	0.806	4.76%	5.00%
8	2.398	0.781	4.59%	5.00%
9	2.432	0.757	4.44%	5.00%
10	2.454	0.734	4.31%	5.00%



La tasa *forward* entre t=1 y t=2, f_2, se resuelve de la ecuación $(1+0.056)(1+f_2)=(1+0.057)^2$. Esto es, f_2=5.8%.

3) En el modelo de Vasicek, a=0.1, b=0.1 y σ=0.02 de modo que:

$$B(t,t+10)=\frac{1}{0.1}(1-e^{-0.1*10})=6.32121$$

$$A(t,T)=\exp\left(\frac{(6.32121-10)(0.1^2*0.1-0.0002)}{0.01}-\frac{0.0004*6.32121^2}{0.4}\right)$$

$$=0.71587$$

El precio del bono es $0.71587*e^{-6.32121*0.1}=0.38046$.

En el modelo de Cox, Ingersoll y Ross, a=0.1, b=0.1 y $\sigma=0.02/\sqrt{0.1}$. Además, $\gamma=\sqrt{a^2+2\sigma^2}=0.13416$.

Definamos $\beta=(\gamma+a)(e^{10\gamma}-1)+2\gamma=0.92992$, $B(t,t+10)=\dfrac{2(e^{10\gamma}-1)}{\beta}=6.0765$, $A(t,t+10)=\left(\dfrac{2\gamma e^{5(a+\gamma)}}{\beta}\right)^{2ab/\sigma^2}=0.69746$. Por lo tanto, el precio del bono es:

$0.6974e^{-6.0765*0.1}=0.37986$.

4) Se tiene s=3, T=1, L=100, K=87. Por lo tanto,

$$\sigma_p = \frac{0.015}{0.1}(1-e^{-2*0.1})\sqrt{\frac{1-e^{-2*0.1*1}}{2*0.1}} = 0.025886$$. P(0,1)=0.94988, P(0,3)=0.85092 y

h=1.14277, de modo que el precio de la *put* es:

87*0.94988*Φ(–1.11688)–100*0.85092*Φ(–1.14277)=0.14.

Análogamente, se puede obtener el precio de la *call*:

100*0.85092* Φ(1.14277)–87*0.94988*Φ(1.11688)=2.59.

Como el bono no paga cupones, la paridad *put-call* establece que el precio de la *put* más el precio del bono debe ser igual al precio de la *call* más el valor presente del precio de ejercicio. El precio de bono es 85.09 y VP(K)=87*0.94988=82.64. La paridad *put-call,* en consecuencia, se satisface:

82.64+2.59=85.09+0.14.

5)a) Sabemos, de las fórmulas vistas en cátedra, que $\omega_p=\mathbf{g}+\mathbf{h}E(r_p)$,

donde $\mathbf{g} = \frac{1}{D}\left(B\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\iota} - A\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}\right)$, $\mathbf{h} = \frac{1}{D}\left(C\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e} - A\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\iota}\right)$, $A = \boldsymbol{\iota}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}$, $B = \mathbf{e}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}$, $C = \boldsymbol{\iota}'\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\iota}$, $D = BC-A^2$, **e**: vector de retornos esperados, **ι:** vector de unos.

En este caso,

e

0.03
0.08

V

0.02	-0.01
-0.01	0.05

Inversa V

55.56	11.11
11.11	22.22

A	4.67
B	0.25
C	100.00
D	2.78

g

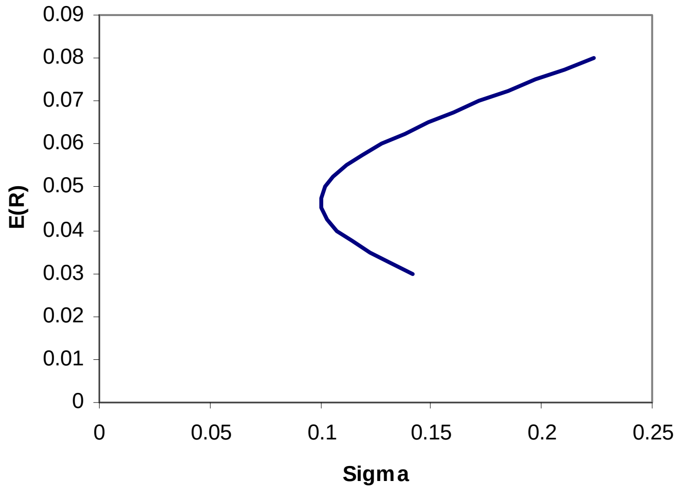
1.6
-0.6

h

-20
20

El *set* de mínima varianza viene dado por:

$$\sigma(\tilde{r}) = \sqrt{\frac{1}{D}\left(C\,E(\tilde{r})^2 - 2AE(\tilde{r}) + B\right)}$$



b) Se sabe que el retorno del portafolio de mínima varianza es A/C=4.7%. Por lo tanto, las participaciones de cada activo vienen dadas por $\omega_p = \mathbf{g} + \mathbf{h}*0.047$:

ω_1	0.67
ω_2	0.33

c) Se sabe que $\mathrm{Cov}(\tilde{r}_p, \tilde{r}_q) = \frac{C}{D}(E(\tilde{r}_p) - A/C)(E(\tilde{r}_q) - A/C) + 1/C$. Dado que el retorno esperado del portafolio de mínima varianza es A/C, la covarianza de este portafolio con cualquier otro perteneciente al *set* de mínima varianza es 1/C. En este caso concreto, 0.01.

7) La varianza del cambio diario en el valor del portafolio es:

$1000^2 + 1000^2 + 2*0.3*1000*1000 = 2\,600\,000$.

Por lo tanto, la desviación estándar diaria es \$1612.45. Para un horizonte de cinco días, se tiene que la desviación estándar es $1612.45*\sqrt{5}$=\$3605.55. De la tabla de la normal estándar, tenemos que $\Phi(-1.645)=0.05$. En consecuencia, el VaR del portafolio es 1.645*3605.55=\$5931.

Para ver la ganancia por diversificación, debemos calcular el VaR para cada activo. En este caso, la desviación estándar del cambio diario en el valor de cada activo es \$1000. Por lo tanto, la desviación estándar para un horizonte de cinco días es $1000*\sqrt{5}$=\$2236.1. En consecuencia, el VaR de cada activo, para un nivel de confianza del 5%, es 1.645*2236.1=\$3878.2. La ganancia por la diversificación es: 3878.2*2−5931=\$1825.4.

8) Según el enunciado

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i . \qquad k=1, 2,...,k.$$

La varianza del retorno del activo i y la covarianza entre los retornos de los activos i y j son:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_\varepsilon^2 , \text{ i=1, 2,..,k,}$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2 ,$$

donde $E(\varepsilon_i^2) = \sigma_{\varepsilon_i}^2$ y $E(\varepsilon_i\varepsilon_j)=0$, $\forall i \neq j$.

La matriz varianza-covarianza de los retornos de los k activos viene dada por:

$$\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\beta\beta}'\sigma_m^2 + \mathbf{E}$$

donde $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$ y $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \sigma_{\varepsilon_1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon_2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_{\varepsilon_k}^2 \end{pmatrix}$.

El Var al $(1-\alpha)$ % de confianza es:

$$\text{VaR}(\alpha) = V_0 k(\alpha) \sqrt{\boldsymbol{\omega}'(\boldsymbol{\beta\beta}'\sigma_m^2 + \mathbf{E})\boldsymbol{\omega}}$$

donde ω es un vector k x 1 con las participaciones de los activos en el portafolio, V_0 es el valor inicial del portafolio.

Si $\omega_i=1/k$, $\forall$ i, el VaR se reduce a:

$$\text{VaR}(\alpha) = V_0 k(\alpha) \sqrt{\sigma_m^2 \left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i / k \right)^2 + \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{k} \sigma_{\varepsilon_i}^2} .$$

A medida que k crece $\text{VaR}(\alpha) \approx V_0 k(\alpha) \sqrt{\sigma_m^2 \left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i / k \right)^2}$. Esto es, para un portafolio bien diversificado, el VaR depende únicamente del riesgo sistemático de los activos que lo componen.