U N I V E R S I D A D D E C H I L E
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Civil Industrial
IN56A 01
Profesor: Viviana Fernández

PROBABILIDADES LIBRES DE RIESGO

I UN EJEMPLO

- Considere un portafolio que consiste de una posición larga en Δ acciones y una posición corta en una opción de compra (*call*), cuyo precio de ejercicio, K, es \$21. Supondremos, por simplicidad, un mundo de un sólo período, en el cual el precio de la acción sigue la siguiente dinámica:

t=1

t=0

Su=22 C_u = max(0, Su–K)=1

S=20

Sd=18 C_d = max(0, Sd–K)=0

- Calculemos el valor de Δ que hace que el portafolio sea libre de riesgo. Si el precio de la acción aumenta de \$20 a \$22, el valor de las acciones es \$ 22Δ y el valor de la *call* es \$1. Por lo tanto, el valor del portafolio es:

$$22\,\Delta - 1$$

Si el precio de la acción cae a \$18, el valor del portafolio es:

$$18\,\Delta$$

- El **portafolio es libre de riesgo** si el valor de Δ escogido es tal que el valor final del portafolio es el mismo bajo ambas alternativas:

$$22\Delta - 1 = 18\Delta \qquad\qquad \Rightarrow \Delta = 0.25$$

Por lo tanto, un portafolio libre de riesgo contiene una **posición larga** en **0.25 acciones** y una **posición corta** en **1 *call*.** Comprobemos que, en verdad, se trata de un portafolio libre de riesgo:

- ❖ Si el precio de la acción sube a \$22, el valor del portafolio en t=1 es: 22 x 0.25–1=\$4.5
- ❖ Si el precio de la acción cae a \$18, el valor del portafolio en t=1 es: 18x 0.25=\$4.5

Es decir, independiente de cuál sea el precio de la acción en t=1, el valor del portafolio es \$4.5.

II GENERALIZACION: PROBABILILDADES LIBRES DE RIESGO

- Imaginemos un portafolio que consiste de una posición larga en Δ acciones y una posición corta en una *call*. Encontraremos el valor de Δ que hace que el portafolio sea libre de riesgo. La dinámica del precio del activo subyacente (acción) es la siguiente:

t=1

t=0

Su $C_u = \max(0, Su - K)$

S
C

Sd $C_d = \max(0, Sd - K)$

con u>1 y d<1.

❖ Si el precio de la acción aumenta de S a Su, el valor del portafolio en t=1 es:

$$Su\,\Delta - C_u$$

❖ Si el precio de la acción baja de S a Sd, el valor del portafolio en t=1 es:

$$Sd\,\Delta - C_d$$

- Para que el portafolio sea libre de riesgo, debe ser el caso que:

$$Su\,\Delta - C_u = Sd\,\Delta - C_d \qquad \Rightarrow \boxed{\Delta = \frac{C_u - C_d}{Su - Sd}}$$

Nótese que Δ es la razón del cambio en el precio de la *call* frente a cambios en el precio de la acción.

- Dado que el **portafolio es libre de riesgo**, su valor en t=0 viene dado por:

$$\frac{Su\Delta - C_u}{1+r}$$

donde r es la **tasa libre de riesgo** por período.

- El costo de formar el portafolio en t=0 es $S\Delta - C$. Por lo tanto:

$$\frac{Su\Delta - C_u}{1+r} = S\Delta - C \qquad \Leftrightarrow \qquad C = S\Delta - \frac{Su\Delta - C_u}{1+r}$$

Pero $\Delta = \frac{C_u - C_d}{Su - Sd}$. Entonces:

$$C = \frac{C_u - C_d}{u-d} - \frac{1}{1+r}\left(\frac{dC_u - uC_d}{u-d}\right) = \frac{1}{1+r}\left(\frac{1+r-d}{u-d}\,C_u + \frac{u-(1+r)}{u-d}\,C_d\right)$$

Definamos la **probabilidad neutral al riesgo**, **p**, **de un alza en el precio de la acción** como:

$$\boxed{p = \frac{1+r-u}{u-d} \equiv \frac{r^*-d}{u-d}} \qquad r^* \equiv 1+r$$

asumiendo que $d<r^*<u$. (Ello garantiza que $0<p<1$).

De lo anterior, el precio de la *call* en t=0 (**hoy**) es:

$$\boxed{C = \frac{p\,C_u + (1-p)\,C_d}{1+r}}$$

La expresión anterior es igual al **valor presente de la esperanza de C en t=1** (igual a $pC_u+(1-p)C_d$).