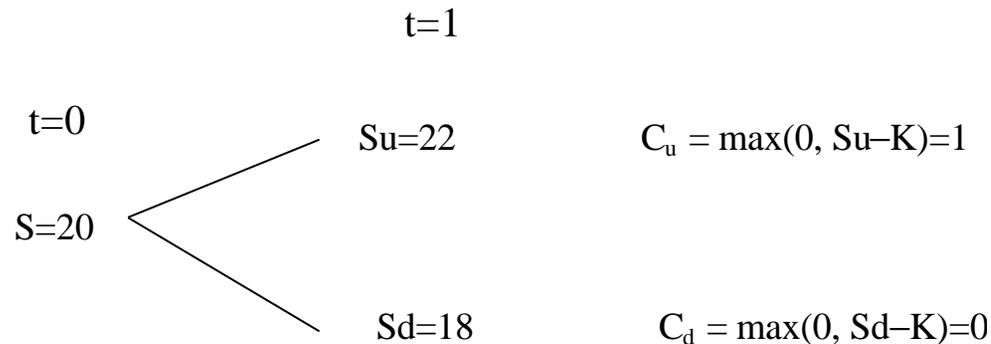




## PROBABILIDADES LIBRES DE RIESGO

### I UN EJEMPLO

- Considere un portafolio que consiste de una posición larga en  $\Delta$  acciones y una posición corta en una opción de compra (*call*), cuyo precio de ejercicio,  $K$ , es \$21. Supondremos, por simplicidad, un mundo de un sólo período, en el cual el precio de la acción sigue la siguiente dinámica:



- Calculemos el valor de  $\Delta$  que hace que el portafolio sea libre de riesgo. Si el precio de la acción aumenta de \$20 a \$22, el valor de las acciones es \$  $22\Delta$  y el valor de la *call* es \$1. Por lo tanto, el valor del portafolio es:

$$22\Delta - 1$$

Si el precio de la acción cae a \$18, el valor del portafolio es:

$$18\Delta$$

- El **portafolio es libre de riesgo** si el valor de  $\Delta$  escogido es tal que el valor final del portafolio es el mismo bajo ambas alternativas:

$$22\Delta - 1 = 18\Delta \quad \Rightarrow \Delta = 0.25$$

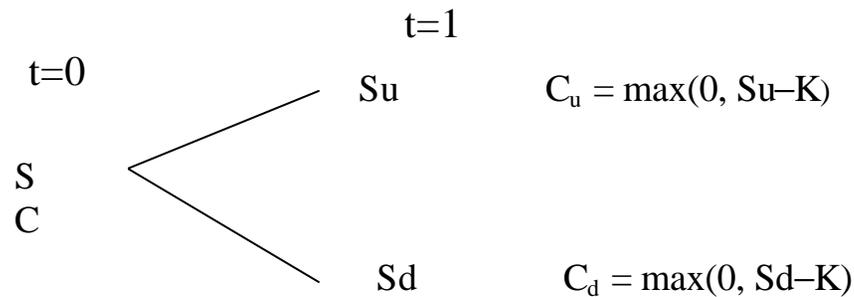
Por lo tanto, un portafolio libre de riesgo contiene una **posición larga** en **0.25 acciones** y una **posición corta** en **1 call**. Comprobemos que, en verdad, se trata de un portafolio libre de riesgo:

- ❖ Si el precio de la acción sube a \$22, el valor del portafolio en  $t=1$  es:  $22 \times 0.25 - 1 = \$4.5$
- ❖ Si el precio de la acción cae a \$18, el valor del portafolio en  $t=1$  es:  $18 \times 0.25 = \$4.5$

Es decir, independiente de cuál sea el precio de la acción en  $t=1$ , el valor del portafolio es \$4.5.

## II GENERALIZACION: PROBABILIDADES LIBRES DE RIESGO

- Imaginemos un portafolio que consiste de una posición larga en  $\Delta$  acciones y una posición corta en una *call*. Encontraremos el valor de  $\Delta$  que hace que el portafolio sea libre de riesgo. La dinámica del precio del activo subyacente (acción) es la siguiente:



con  $u > 1$  y  $d < 1$ .

- ❖ Si el precio de la acción aumenta de  $S$  a  $S_u$ , el valor del portafolio en  $t=1$  es:

$$S_u \Delta - C_u$$

- ❖ Si el precio de la acción baja de  $S$  a  $S_d$ , el valor del portafolio en  $t=1$  es:

$$S_d \Delta - C_d$$

- Para que el portafolio sea libre de riesgo, debe ser el caso que:

$$Su\Delta - C_u = Sd\Delta - C_d \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$$

Nótese que  $\Delta$  es la razón del cambio en el precio de la *call* frente a cambios en el precio de la acción.

- Dado que el **portafolio es libre de riesgo**, su valor en  $t=0$  viene dado por:

$$\frac{Su\Delta - C_u}{1+r}$$

donde  $r$  es la **tasa libre de riesgo** por período.

- El costo de formar el portafolio en  $t=0$  es  $S\Delta - C$ . Por lo tanto:

$$\frac{Su\Delta - C_u}{1+r} = S\Delta - C \quad \Leftrightarrow \quad C = S\Delta - \frac{Su\Delta - C_u}{1+r}$$

Pero  $\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$ . Entonces:

$$C = \frac{C_u - C_d}{u - d} - \frac{1}{1+r} \left( \frac{dC_u - uC_d}{u - d} \right) = \frac{1}{1+r} \left( \frac{1+r-d}{u-d} C_u + \frac{u-(1+r)}{u-d} C_d \right)$$

Definamos la **probabilidad neutral al riesgo, p, de un alza en el precio de la acción** como:

$$\boxed{p = \frac{1+r-u}{u-d} \equiv \frac{r^*-d}{u-d}} \quad r^* \equiv 1+r$$

asumiendo que  $d < r^* < u$ . (Ello garantiza que  $0 < p < 1$ ).

De lo anterior, el precio de la *call* en  $t=0$  (**hoy**) es:

$$\boxed{C = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{1+r}}$$

La expresión anterior es igual al **valor presente de la esperanza de C en t=1** (igual a  $pC_u + (1-p)C_d$ ).