UNIVERSIDAD DE CHILE
FAC. DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Departamento de Ingeniería Industrial

Curso: IN51A Economía Industrial
Semestre: Otoño 2005
Profesores: Ronald Fisher
Soledad Arellano
Auxiliares: Paola Bordón
Sebastián Carmona

Clase Auxiliar #4

P1) Suponga que un gerente quiere contratar a un trabajador, sin embargo hay aspectos relacionados al trabajador que el gerente desconoce. Él sabe que los trabajadores son neutros al riesgo, pero el trabajador puede ser de 2 tipos con respecto a la desutilidad: esta puede ser e^2 ó $2e^2$. Es así como los trabajadores del segundo tipo (a quienes llamaremos malos) sufren una mayor desutilidad que los del primer tipo (llamados buenos). Por lo tanto, las funciones de utilidad para los diferentes tipos de trabajadores están dadas por: $U_B(w,e) = w - e^2$ y $U_M(w,e) = w - 2e^2$. La probabilidad de que un trabajador sea de tipo B es q. Ambos trabajadores tienen utilidad de reserva $U_0 = 0$. El gerente, que también es neutral al riesgo, valora el esfuerzo del trabajador a $\pi(e) = ke$, donde k >1 es una constante independiente del tipo de trabajador.

a) Plantee y resuelva el problema del gerente si éste posee información perfecta sobre el tipo de trabajador.
b) Plantee el problema del gerente cuando existe el problema de selección adversa.
c) Resuelva el problema calculando el contrato óptimo y compare el caso de información simétrica y asimétrica.
d) Considere el caso que el gerente quisiera contratar sólo trabajadores de tipo B. Calcule el contrato óptimo para este caso. Compare el resultado obtenido con los obtenidos anteriormente.

P2) Suponga que hay dos períodos: t=1 (ex ante) y t=2 (ex post). En el período 2, un proveedor y un comprador deciden si intercambiar una unidad de un bien indivisible (por ejemplo, un proyecto). De este modo, el volumen de intercambio es 0 ó 1. El valor del bien para el comprador es v y el costo de producirlo para el proveedor es c (con c<1/2).En el período 1, el proveedor invierte, afectando la calidad del producto (es decir, el valor para el comprador). El valor ex post para el comprador es $v(I) = 3I - \left(\frac{I^2}{2}\right)$. Por lo tanto v es observable por el comprador, pero no verificable por un tribunal, por lo que no se puede especificar en un contrato. Determine la cantidad eficiente de inversión. Si las partes negocian ex post de modo que el excedente de intercambio se lo dividen equitativamente, ¿es óptima la inversión resultante? Identifique la externalidad. Si las partes firman un contrato en que se especifica que el comprador posee el derecho a comprar el precio a un determinado precio p, ¿es eficiente este contrato? ¿Qué ocurriría si el proveedor poseyera el derecho a vender a un determinado precio? ¿Qué ocurriría si el proveedor tuviera el derecho a escoger el precio ex post?

a) Como existe información perfecta, podemos crear un contrato para cada tipo de trabajador de manera de maximizar la utilidad de la firma.

- Contrato para trabajadores Buenos:

Max $Ke_B - w_B$
s.a. $w_B - e_B^2 \geq 0$

$L = Ke_B - w_B + \lambda(w_B - e_B^2)$

$(\partial L)/(\partial w_B) = -1+\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 > 0$
$(\partial L)/(\partial e_B) = K - 2\lambda e_B = 0 \Rightarrow e_B = (K/2)$

Como $\lambda > 0$, $w_B = e_B^2 \Rightarrow w_B = (K^2)/4$

- Contrato para trabajadores Malos:

Max $Ke_M - w_M$
s.a. $w_M - 2e_M^2 \geq 0$

$L = Ke_M - w_M + \lambda(w_M - 2e_M^2)$

$(\partial L)/(\partial w_M) = -1+\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 > 0$
$(\partial L)/(\partial e_M) = K - 4e_M = 0 \Rightarrow e_M = (K/4)$

Como $\lambda > 0$, $w_M = 2e_M^2 \Rightarrow w_M = (K^2)/8$

$$E(\pi) = q\left(\frac{k^2}{2} - \frac{k^2}{4}\right) + (1-q)\left(\frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{8}\right) = q\left(\frac{k^2}{4}\right) + (1-q)\left(\frac{k^2}{8}\right) = (1+q)\left(\frac{k^2}{8}\right)$$

b) El problema ahora es:

Max $q[Ke_B - w_B] + (1-q)[Ke_M - w_M]$

s.a. $w_B - e_B^2 \geq 0$ (R1)

$w_M - 2e_M^2 \geq 0$ (R2)

$w_B - e_B^2 \geq w_M - e_M^2$ (R3)

$w_M - 2e_M^2 \geq w_B - 2e_B^2$ (R4)

Podemos notar primero que nada que $w_B - e_B^2 \geq w_M - e_M^2 \geq w_M - 2e_M^2 \geq 0$

Luego, restricción R1 se cumple satisfaciendo R2 y R3, por lo tanto puede ser eliminada del problema de maximización.

Además, de R3 y R4 se tiene $e_B^2 - e_M^2 \leq w_B - w_M \leq 2(e_B^2 - e_M^2) \Rightarrow e_B^2 \geq e_M^2 \Rightarrow e_B \geq e_M$

El Lagrangeano del problema es:

$L = q[Ke_B\}-wB]+(1-q)[Ke_M-w_M]+ \lambda(w_M-2e_M^2)+ \mu(w_B-e_B^2- w_M+e_M^2) + \delta(w_M-2e_M^2 - w_B + 2e_B^2)$

$$(\partial L)/(\partial w_B)=-q+\mu-\lambda=0 \ \ => \mu-\lambda=q \quad (1)$$

$$(\partial L)/(\partial w_M)=-(1-q)+ \lambda- \mu+\delta=0 \ \ =>\lambda-\mu+\delta=(1-q) \quad (2)$$

$$(\partial L)/(\partial e_B)=qK-2\mu e_B +4\delta e_B =0 \ =>\mu-2\delta=qK/2e_B \quad (3)$$

$$(\partial L)/(\partial e_M)=(1-q)K - 4\lambda e_M + 2\mu e_M - 4\delta e_M =0 \ => 2\lambda-\mu+2\delta=\frac{(1-q)K}{2e_M} \quad (4)$$

de (1) y (2)

$\mu - \delta = q$
$\lambda - \mu + \delta = 1-q$
$\lambda=1>0$

Por otra parte, $\mu>0$, pues si $\mu=0$ entonces de (2) y/o (3) se tendrá $\mu<0$, lo cual no es posible.

Como $\lambda > 0 \quad => \quad w_M - 2e_M^2=0$ (5)

Como $\mu > 0 \quad => \quad w_B - e_B^2 = w_M - e_M^2$ (6)

Veamos ahora si la restricción (R4) es activa:

$$w_M - 2e_M^2 - w_B + 2e_B^2=(w_M - e_M^2 -w_B+e_B^2) - e_M^2 +e_B^2 =-e_M^2+e_B^2>0$$

Por lo tanto $\delta=0$ pues la restricción no es activa.

De (5) $\quad w_M = 2e_M^2$.
De (5) y (6) $\quad w_B = (2e_M^2) - e_M^2 + e_B^2 \ => w_B =e_M^2 + e_B^2$.
De (1) $\quad \mu=q$, de (3) $q = \frac{qK}{2e_B}$ => $e_B = \frac{K}{2}$

De (4) $\quad 2-q = \frac{(1-q)K}{2e_M}$ => $e_M = \frac{(1-q)K}{2(2-q)}$

De (5) $\quad w_M = \frac{(1-q)^2K^2}{2(2-q)^2}$

De (6) $\quad w_B = \frac{K^2}{4} + \frac{(1-q)^2K^2}{4(2-q)^2}$

$$E(\pi) = q\left[\frac{K^2}{2} - \frac{K^2}{4} - \frac{(1-q)^2K^2}{4(2-q)^2}\right] + (1-q)\left[\frac{(1-q)K^2}{2(2-q)^2} - \frac{(1-q)^2K^2}{2(2-q)^2}\right] = \frac{K^2}{4(2-q)} =$$

$$E(\pi)_{(a)} - E(\pi)_{(c)} = \frac{K^2(1+q)}{8} - \frac{K^2}{4(2-q)} = \frac{K^2}{8}\frac{q(1-q)}{4(2-q)} \geq 0 \forall q \in [0,1] \Rightarrow E(\pi)_{(a)} \geq E(\pi)_{(c)}$$

c) El problema es

Max q[Ke - w]

s.a. w - e^2 ≥ 0 (7)

w - $2e^2$<0 (8)

El lagrangeano será:

L = q[Ke-w]+ λ(w-e^2) - μ(w-$2e^2$)

(∂L)/(∂w) = -q + λ - μ=0 => λ - μ = q (9)

(∂L)/(∂e)=qK - 2eλ +4μe = 0 => λ - 2μ = $\frac{qK}{2e}$ (10)

Si λ= 0, entonces de (9) y/o (10) μ<0, lo cual no es posible. Por lo tanto λ > 0.
Si λ> 0, entonces (7) es activa; luego w=e^2.

Veremos ahora si (8) es activa: w - $2e^2$ = (e^2) - $2e^2$ = -e^2 < 0, por lo tanto (7) no es activa, => μ=0. Además de (9) λ=q. De (10):

$$q = \frac{qK}{2e} \Rightarrow e = \frac{K}{2} \Rightarrow w = \frac{K^2}{4}$$

$$\Rightarrow E(\pi) = q\left[\frac{K^2}{2} - \frac{K^2}{4}\right] = q\frac{K^2}{4} \therefore E(\pi)_{(a)} \geq E(\pi)_{(d)}$$

$$E(\pi)_{(c)} - E(\pi)_{(d)} = \frac{K^2}{4(2-q)} - q\frac{K^2}{4} = \frac{K^2}{4}\left[\frac{1-2q+q^2}{2-q}\right] \geq 0 \forall q \in [0,1]$$

Por lo tanto, $E(\pi)_{(c)} \geq E(\pi)_{(d)}$

P2) La cantidad eficiente de inversión viene dada por la maximización del excedente total, es decir, se resuelve

$$\underset{I}{\text{Max}}\ \text{ExT} = \text{Ex}_c + \text{Ex}_p = v(I) - p + p - c - I = 3I - \left(\frac{I^2}{2}\right) - c - I$$

$$\frac{\partial ExT}{\partial I} = 3 - I - 1 = 0 \Rightarrow I = 2$$

Por lo tanto, la cantidad eficiente de inversión es I=2.

La negociación *ex post* implica que se reparten el excedente de intercambio equitativamente

$$v(I) - p = p - c$$

$$p = \left(\frac{v(I) + c}{2}\right)$$

Ex ante, el proveedor resuelve

$$\underset{I}{\text{Max}}\ \frac{v(I) + c}{2} - c - I$$

La condición de primer orden es 3/2-I/2-1=0, de donde I=1, lo que es sub-óptimo (1 < 2).

- Si el comprador tiene el derecho a comprar al precio p, el proveedor no invertirá o invertirá la cantidad mínima a la que el comprador compraría, es decir, tal que v(I)=p.

- Si p=4, la inversión es igual a 2 (inversión óptima), pues el proveedor se apodera de todo el beneficio que genera.

Notar que si v(I)=p entonces el proveedor resolverá el mismo problema que un planificador social benevolente (como en la parte anterior).

- Si p<4, la inversión es sub-óptima o inexistente.

Si el proveedor posee el derecho a vender a un determinado precio la inversión es nula, pues su beneficio se maximiza (dado un p) minimizando el gasto (I).

- Si el proveedor posee el derecho a escoger el precio, se tendría la inversión eficiente. Esto pues el EPS del juego es que p=v(I).