Curso de Econom’ia Industrial

Ronald Fischer
CEA-DII
Universidad de Chile

Febrero 2005

Contenidos

Definición: juego en forma extensiva

1. Jugadores $i \in 1 \ldots n$ racionales.
2. Árbol del juego: nodos asignados a jugadores y ramas (acciones).
3. Conjuntos de información: información que posee cada jugador en su nodo.
4. Estrategias $s_i \in S_i$ de cada jugador.
5. Pagos u_i a los jugadores.

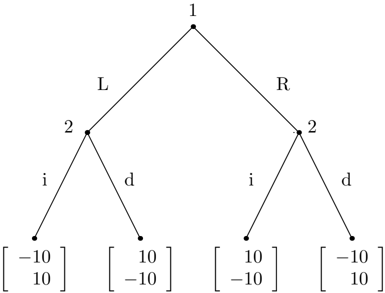
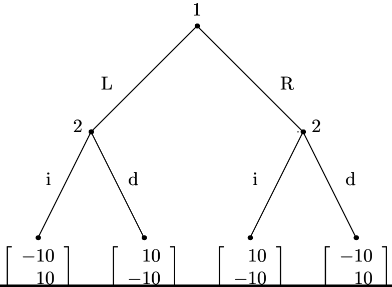
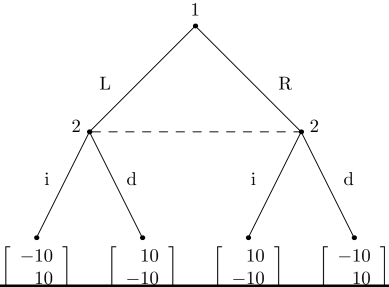


Figura: El juego de la moneda con información completa.





Otro juego

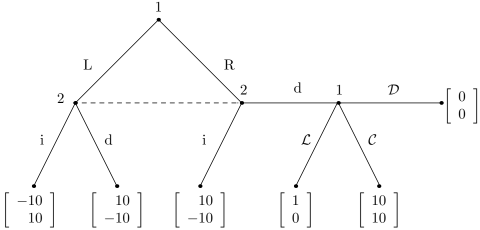


Figura: Un juego con dos etapas.

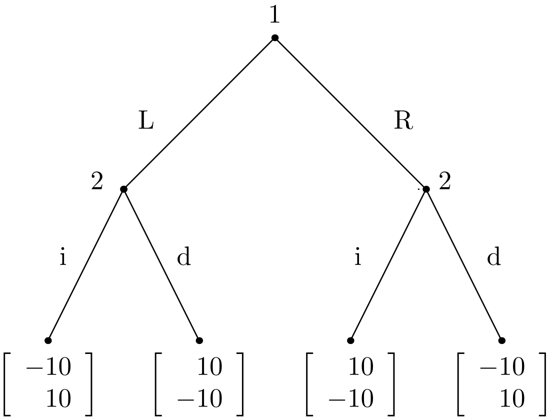
$$S_2 = \{i, d\}$$

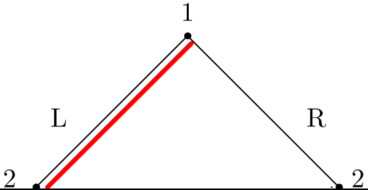
$$S_1 = \{(L, \mathcal{L}), (L, \mathcal{C}), (L, \mathcal{D}), (D, \mathcal{L}), (D, \mathcal{C}), (D, \mathcal{D})\}$$

Más definiciones

- Definición
  Una combinación de estrategias es una n-tupla de estrategias, una por cada jugador: $s \in S \equiv \Pi_{i=1}^{n} S_i$.
  - Notación: $s_{-i} = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$, la estrategia usada por los demás jugadores (excepto i).
  - De acuerdo a esa definición, $s = (s_i, s_{-i})$.

Ejemplos de estrategias





Conceptos de solución

Definición

Una estrategia s_i^* de un jugador i es mejor respuesta a s_{-i} si

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i.s_{-i}), \forall s_i \in S_i$$

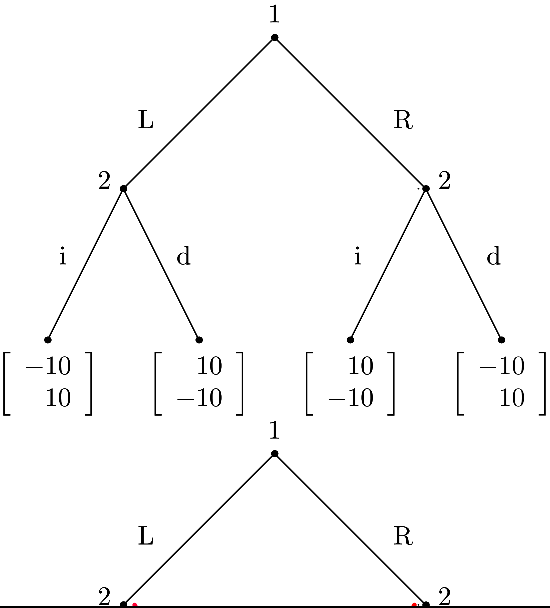
Definición

Una estrategia s_i^* del jugador i es dominante si es mejor respuesta ante todas las estrategias de los demás jugadores:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}),\ \forall s_i,\ \forall s_{-i}.$$

con desigualdad estricta para algún s_i.

Ejemplo de estrategia dominante



Más ...

Definición

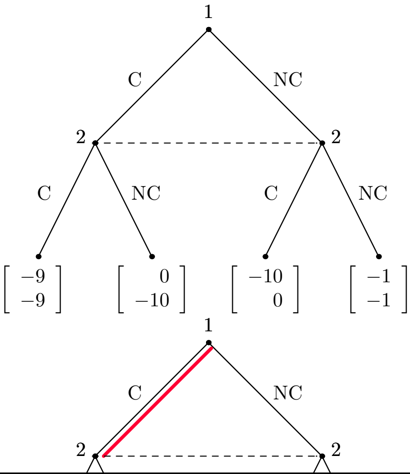
Una estrategia s_i es débilmente dominada por s_i' si, $\forall s_{-i}$, se tiene que $u_i(s_i', s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$, con desigualdad estricta para al menos un s_{-i}.

Equilibrio en estrategias dominantes

Definición

Una combinación de estrategias $s^* = (s_i^*)_{i=1}^n$ *es un* *equilibrio en estrategias dominantes* *si cada* s_i^* *es dominante.*

El problema es que no siempre existe.



Forma normal de un juego

Definición (Un juego en forma normal es:)

1. *Jugadores racionales* $i \in 1, \ldots, n$.
2. *Estrategias* $s_i \in S_i$ *de cada jugador.*
3. *Pagos* $u_i(s)$ *a cada jugador.*

Cuadro: Dilema del prisionero

Reo 1 \ Reo 2	C	NC
C	-9, -9	0, -10
NC	-10, 0	-1,-1

Equilibrio por eliminación iterada de estrategias dominadas

- Se eliminan todas las estrategias estrictamente dominadas de 1.
- En el nuevo juego, se eliminan las estrategias dominadas de 2, y así hasta que no se puede continuar.
- No siempre único, puede

Cuadro: Batalla del Mar de Bismark

Imamura

Kenney		Norte	Sur
	Norte	2,-3/2	2,-2
	Sur	1,-1	3,-3

Cuadro: Batalla del Mar de Bismark

Imamura

Kenney		Norte	Sur
	Norte	2,-3/2	~~2,-2~~
	Sur	1,-1	~~3,-3~~

Equilibrio de Nash

Definición

Un equilibrio de Nash es s^* tal que $\forall i, \forall s_i \in S_i$

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*).$$

Problemas: A veces no existe, a veces hay múltiples equilibrios.

Cuadro: El juego del gallina

1 \ 2	Sigue	Desvía
Sigue	-100, -100	10, 0
Desvía	0, 10	1,1

Cuadro: El juego del gallina

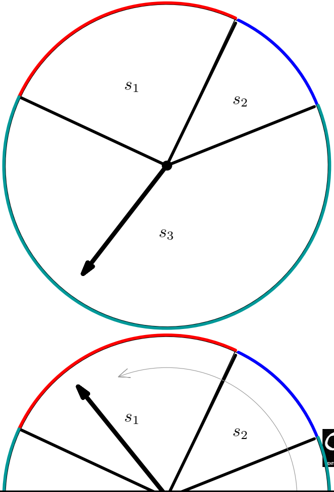
1 \ 2	Sigue	Desvía
Sigue	-100, -100	10, 0

Estrategias mixtas y equilibrios de Nash

Definición

Una *estrategia mixta* $\sigma_i = (\sigma_i(s_i^1), \ldots, \sigma_i(s_1^{m_i}))$ *es una distribución de probabilidad sobre las m_i estrategias de i.*

Notación: $\sigma \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$.



Más definiciones

- **Definición**

  El pago a i se la combinación de estrategias σ es:
  $U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s \in S} \left(\Pi_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j) \right) u_i(s)$

- **Definición**

  Una estrategia σ_i del jugador i es mejor respuesta a σ_{-i} si
  $U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq U_i(\sigma_i', \sigma_{-i}),\ \forall \sigma_i'$.

- **Definición**

  Un equilibrio de Nash es una combinación de estrategias
  $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ *tal que*

$$U_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*),\ \forall i,\ \forall \sigma_i$$

Un resultado importante

Lemma (Caracterización de equilibrios de Nash)

σ^* es un equilibrio de Nash si y solo si para todo jugador i, si la probabilidad asignada por σ_i^* a una estrategia s_i^j es positiva, entonces s_i^j es mejor respuesta a σ_{-i}^*.

Ejemplo

En el juego del gallina hay tres equilibrios de Nash: (S, D), (D, S) y una estrategia mixta: $\sigma_1 = \sigma_2 = (9/109, 100, 109)$. La probabilidad de choque es ¡ 1 %.

Problemas del equilibrio de Nash

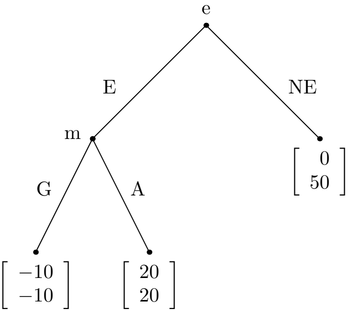


Figura: Juego de entrada de competencia

- Dos equilibrios de Nash: (NE, G) y (E, A).
- ¿Cuál es más razonable?

Perfección en el subjuego

- Definición

  Un subárbol del juego es el subconjunto de nodos y ramas que se origina en un conjunto de información que es singleton.

- Definición

  Un equilibrio de Nash es perfecto en el subjuego (EPS) si en cada subárbol, el equilibrio restringido al subárbol es un equilibrio de Nash.

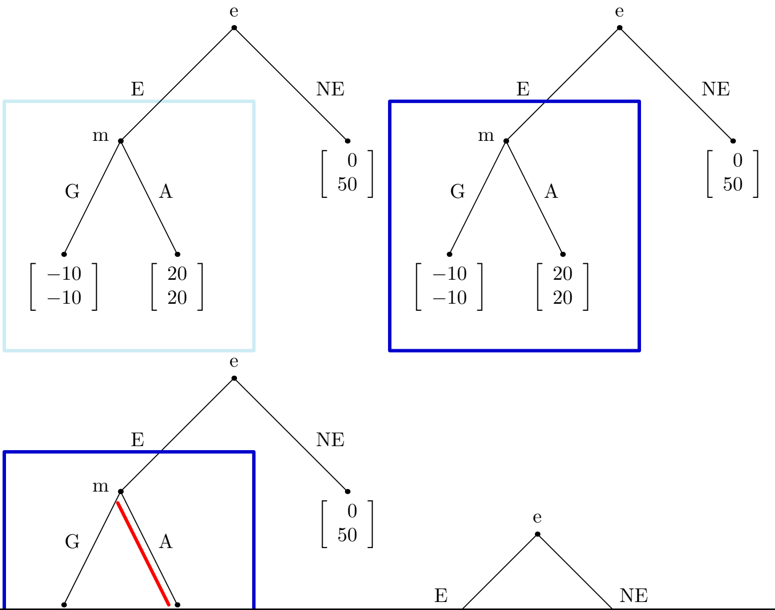
- Ejemplo

  En el juego de entrada de competencia, (NE, G) no es EPS.

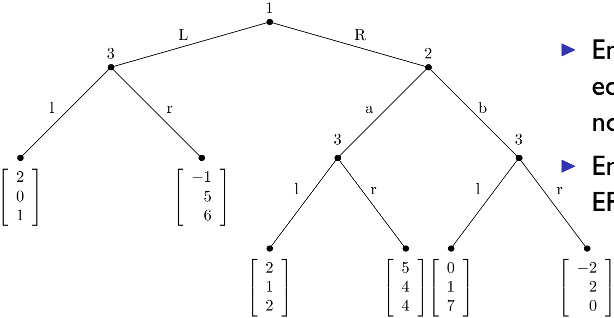
Propiedades de un EPS

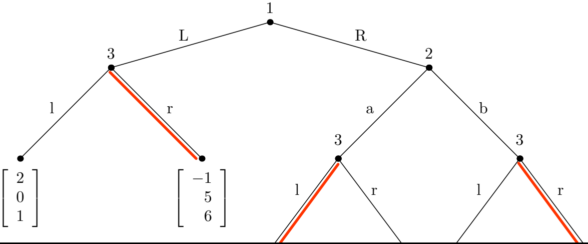
1. Siempre existe. ?'Porqué?
2. En juegos de información perfecta, es único.
3. En juegos de información perfecta, se usa el método de inducción hacia atrás.

Inducción hacia atrás: Entrada de competencia



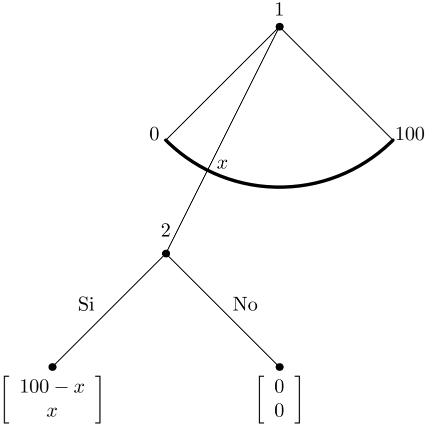
Un ejemplo con tres jugadores





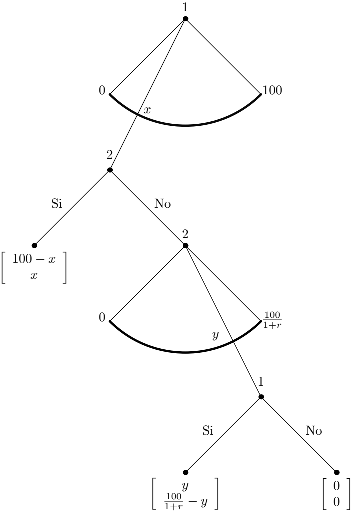
- Encuentre un equilibrio que no es EPS.
- Encuentre el EPS.

Aplicaciones: El juego del ultimátum



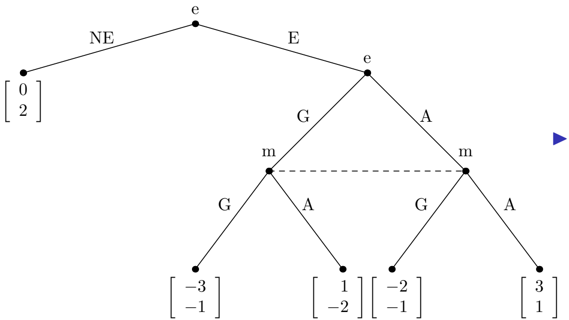
- 1 hace una oferta para dividir \$100.
- 2 puede aceptar o rechazar la oferta.
- Muestre que $\forall x \in (0, 100]$, (x, Si) es un equilibrio.
- Encuentre el (único) EPS.

El juego del ultimátum con dos etapas



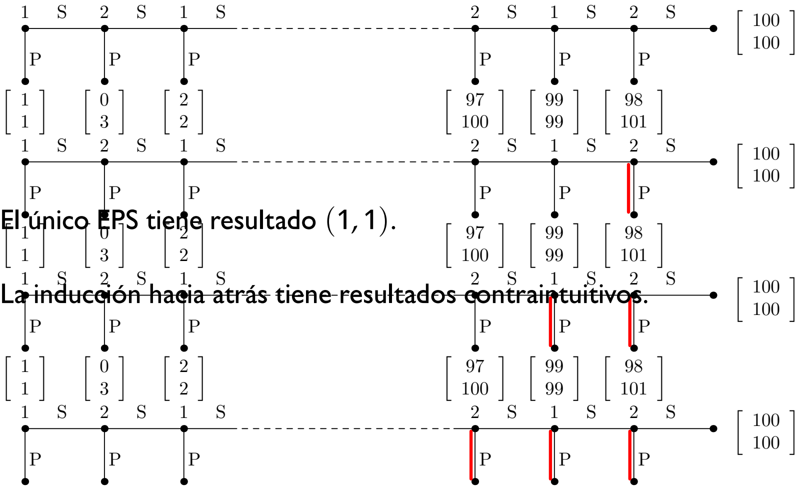
- Si el jugador 2 no acepta la oferta de 1, puede hacer una contraoferta.
- Encuentre equilibrios no EPS y el único EPS.
- Generalice al caso de 3 y más períodos.

Información imperfecta y EPS: Entrada de Competencia II



- Muestre que hay tres equilibrios, pero solo uno es EPS.

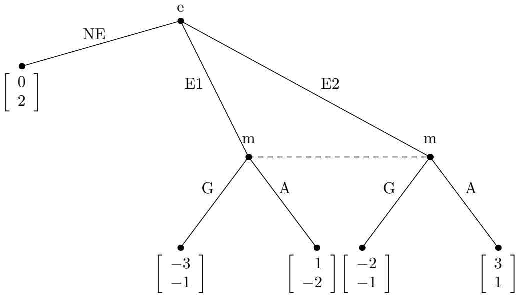
Problemas del EPS: el juego del cienpiés



El único EPS tiene resultado $(1, 1)$.

La inducción hacia atrás tiene resultados contraintuitivos.

Información imperfecta y EPS: Entrada de Competencia II'

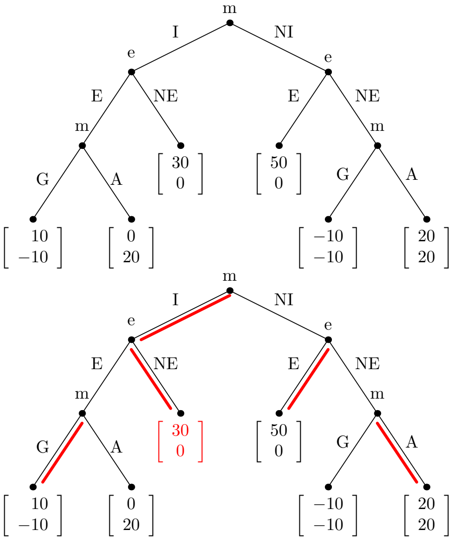


- Una modificación trivial de entrada de competencia II.
- Al tener solo un subárbol, EPS no discrimina entre equilibrios de Nash. ?'Cuáles son?

Información imperfecta

- Definición
  Un juego es de información imperfecta cuando algunos CI tienen más de un nodo.
  - Problema: EPS pierde fuerza en ese caso.
- Definición
  Un juego es de información incompleta si los jugadores no conocen todo el juego (los pagos a los demás, por ejemplo).
  - Problema: Juego no está bien definido $\Rightarrow$ la transformación de Harsany.

Entrada de competencia III: Inversión como defensa



El monopolista puede invertir para prevenir la entrada. En el EPS no hay entrada e inversión ineficiente. El juego con inversión no observable: Ahora $s_1 = (I, G, A)$ no es mejor respuesta a $s_2 = E$. El equilibrio sin inversión y con entrada ahora es EPS. A veces es mejor saber menos.