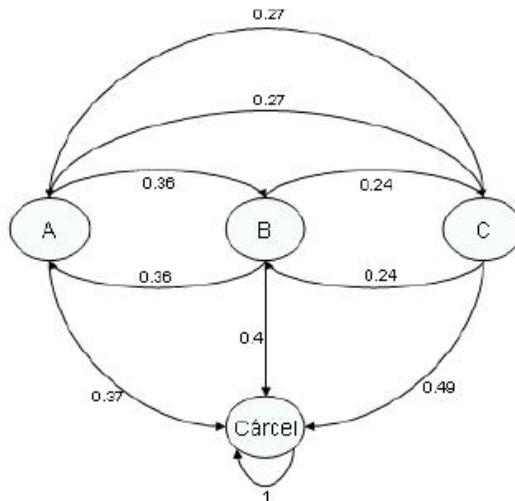




Solución Clase Auxilliaria 31 Mayo de 2005
 Cadenas de Markov con Beneficios

Problema 1

1. Para comenzar debemos ver cual es la forma de la cadena y especificar las probabilidades de transición. Estas son las que se ilustran arriba.



Adicionalmente debemos definir la estructura de costos asociada. Debería ser claro que:

$$r_A = 1000 \quad , \quad r_B = 3000 \quad , \quad r_C = 7000$$

$$r_{AB} = r_{BA} = -500 \quad , \quad r_{AC} = r_{CA} = -1000 \quad , \quad r_{BC} = r_{CB} = -2000$$

De esta forma:

$$\hat{r}_A = 550 \quad , \quad \hat{r}_B = 2340 \quad , \quad \hat{r}_C = 6250$$

Entonces ahora debemos resolver el sistema (ojo: notar que $g = 0$):

$$\vec{W} + \vec{0} = \begin{pmatrix} 550 \\ 2340 \\ 6250 \\ 0 \end{pmatrix} + P \cdot \vec{W}$$

Eligiendo $W_{\text{Cárcel}} = 0$ tendremos que:

$$\vec{W}_T = (I - P_{TT})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 550 \\ 2340 \\ 6250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5394 \\ 6506 \\ 9268 \end{pmatrix}$$

Una vez conocido el valor de W utilizamos las formulas de Markov con beneficios:

$$\vec{V}_n = (n) \cdot 0 \cdot \vec{e} + \begin{pmatrix} 5394 \\ 6506 \\ 9268 \\ 0 \end{pmatrix} + P^n \left[\begin{pmatrix} 1000 \\ 3000 \\ 7000 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5394 \\ 6506 \\ 9268 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

De este vector nos interesa la componente $V_n(A)$, dado que nos dicen que la condición inicial es partir en el país A.

Adicionalmente se nos pide el cálculo para $n=3$.

$$\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 5394 \\ 6506 \\ 9268 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2025 & 0,0648 & 0,0864 & 0,6463 \\ 0,0648 & 0,1872 & 0,0972 & 0,6508 \\ 0,0864 & 0,0972 & 0,1305 & 0,6859 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1000 \\ 3000 \\ 7000 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5394 \\ 6506 \\ 9268 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 4081 \\ 5344 \\ 1016 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces la respuesta es 4081.

- Reformulamos la pregunta: Cual es el tiempo esperado en el transiente partiendo desde B? A estas alturas sabemos que la respuesta es $W(B)$ donde \vec{W} es el vector que cumple con:

$$\vec{W} = [I - P_{TT}]^{-1} \cdot \vec{e}$$

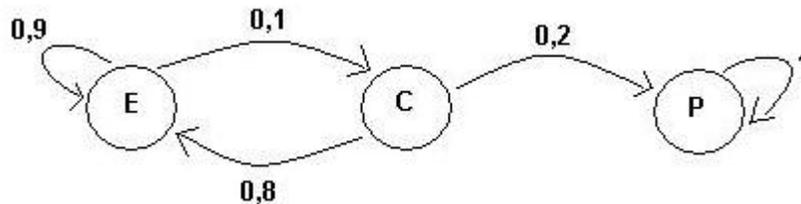
Con $P_{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0,36 & 0,27 \\ 0,36 & 0 & 0,24 \\ 0,27 & 0,24 & 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Por lo tanto :

$$W = \begin{pmatrix} 2,4863 \\ 2,4365 \\ 2,2561 \end{pmatrix}$$

Y la respuesta es 2.4365.

Problema 2

- Comenzamos por formar la cadena y especificar las probabilidades de transición.



En donde hemos definido la siguiente notación para los estados:

- **E**: Se presenta a las elecciones.
- **C**: Reflexiona un año en la casa de retiro.
- **P**: Descansa definitivamente en la parcela.

De acuerdo a los valores denotados en el enunciado, definimos la siguiente estructura de costos:

$$r_E = 1000 \quad , \quad r_C = 200 \quad , \quad r_P = 0$$

$$r_{EC} = r_{CE} = 100 \quad , \quad r_{CP} = 400 \quad , \quad r_{EE} = r_{PP} = 0$$

De esta forma:

$$\hat{r}_E = r_E + r_{EC} \cdot P_{EC} = 1000 + 100 \cdot 0,1 = 1010$$

$$\hat{r}_C = r_C + r_{CE} \cdot P_{CE} + r_{CP} \cdot P_{CP} = 200 + 100 \cdot 0,8 + 400 \cdot 0,2 = 360$$

$$\hat{r}_P = 0$$

Notar que como sólo los estados transientes tienen valores no negativos en el vector de costos anterior, se tendrá que $g = 0$ (en el estado estacionario la probabilidad asociada a estar en esos estados es cero, mientras que para el estado recurrente el costo asociado es cero).

Entonces se satisface la siguiente ecuación:

$$\vec{W} + \vec{0} = \begin{pmatrix} 1010 \\ 360 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{W}$$

Imponiendo que $W_P = 0$ se tiene que:

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} 52300 \\ 42200 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, el beneficio acumulado esperado cuando quedan n etapas estará dado por:

$$\vec{V}_n = (n) \cdot 0 \cdot \vec{e} + \begin{pmatrix} 52300 \\ 42200 \\ 0 \end{pmatrix} + P^n \left[\begin{pmatrix} 1000 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 52300 \\ 42200 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

En particular, se nos pide calcular el costo acumulado que se espera para los próximos 3 años, asumiendo que acaba de inscribirse para una elección. Por lo tanto, debemos reemplazar $n = 3$ en la ecuación anterior:

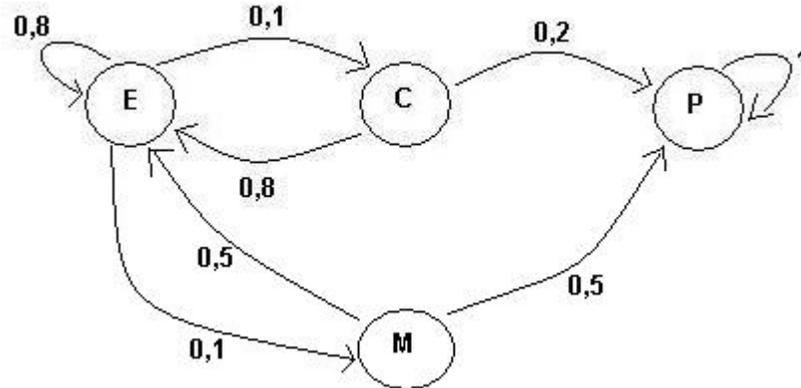
$$\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 52300 \\ 42200 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,873 & 0,089 & 0,038 \\ 0,712 & 0,072 & 0,216 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1000 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 52300 \\ 42200 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

De lo que se obtiene:

$$\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 3777,1 \\ 2650,4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como parte en el estado de elecciones, escogemos la primera componente del vector anterior y se obtiene que el costo acumulado esperado para los próximos 3 años es igual a 3777,1

2. Ahora la cadena asociada al problema es la siguiente (Denotamos por M al estado en que dedica un año a la música):



Debemos calcular el número de años esperado que *Fernet* estará en el régimen transiente. Para ello, definimos la siguiente estructura de costos:

$$r_E = r_C = r_M = 1 \quad r_P = 0 \quad y \quad r_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

Imponiendo que la componente recurrente $W_P = 0$, el vector \vec{W} en sus componentes asociadas a los estados transientes debe cumplir con:

$$\vec{W}_{Transientes} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{W}_{Transientes}$$

Resolviendo, se llega a que:

$$\vec{W}_{Transientes} = \begin{pmatrix} 17,14 \\ 14,71 \\ 9,57 \end{pmatrix}$$

La primera componente nos da la respuesta: Si acaba de lanzar su candidatura en una elección, se espera que transcurran 17,14 años para que se retire definitivamente a la parcela.

3. Si *Fernet* acaba de ingresar a la casa de retiro, entonces el número de años esperado hasta que se retire definitivamente a la parcela corresponde a la segunda componente del vector anterior y, por lo tanto, equivale a 14,71 años. Análogamente, si parte en el estado que se dedica a la música la tercera componente nos dice que se demorará en términos esperados un total de 9,57 años.

Ambos valores son menores que el resultado obtenido en la parte anterior, lo que intuitivamente se explica notando que desde el estado E al menos debe pasar una etapa más por el transiente antes de llegar al recurrente. En cambio, si parte en los estados C o M puede ocurrir que ingrese directamente al estado recurrente en la primera transición.

Dudas y/o errores:
 Mario Guajardo
 mguajard@ing.uchile.cl