



## Solución CTP 1 19 de Marzo, 2002

1. La nota de cada uno de los alumnos ( $n_i$ ) sigue una exponencial de parámetro  $\lambda_s$  y en la semana  $s$  quedan  $K - s + 1$  participantes. Como vimos en la clase auxiliar 1 la distribución del mínimo  $M$  variables aleatorias exponenciales es una exponencial que tiene como parámetro la suma de los parámetros de las  $M$  variables aleatorias originales. Aplicando lo anterior a este caso se tiene que:

$$\min(n_1, n_2, \dots, n_{(K-s+1)}) \rightsquigarrow \exp((K - s + 1) \cdot \lambda_s)$$

La probabilidad de que Tony Valero sea el amenazado por conocimientos de la semana  $s$  es igual a la probabilidad de que su nota sea la menor de entre los  $(K - s + 1)$  participantes. Denotando a esta probabilidad por  $a_s$  se tiene que:

$$a_s = P(\text{Nota de Tony} < \text{Todas las demás notas}) = \frac{\lambda_s}{(K - s + 1) \cdot \lambda_s} = \frac{1}{K - s + 1}$$

2. La probabilidad de que Tony sea el eliminado de la semana  $s$  esta condicionado a lo sucedido en las  $s - 1$  semanas anteriores. Para ello definamos el siguiente evento:

$B_{s-1}$  = Valero no ha sido eliminado en las  $s - 1$  primeras semanas.

Condicionanado sobre este evento se tiene que:

$$F_s = (F_s|B_{s-1}) \cdot P(B_{s-1}) + (F_s|\sim B_{s-1}) \cdot P(\sim B_{s-1})$$
$$F_s = (F_s|B_{s-1}) \cdot P(B_{s-1}) + 0$$

La probabilidad que nuestro protagonista sea el eliminado en la semana  $s$  dado que todavía está en competencia, está dada por la probabilidad de que sea el amenazado por conocimientos y el eliminado sea el amenezado por conocimientos o que sea el amenazado por convivencia y el eliminado sea el amenazado por convivencia. Esto es:

$$(F_s|B_{s-1}) = a_s \cdot q_s + (1 - a_s) \cdot p_s \cdot (1 - q_s)$$

Por otro lado para no ser eliminado en las primeras  $s - 1$  semanas se tiene que dar en cada una de dichas semanas uno de los siguientes eventos:

- No ser amenazado por conocimientos, ni por convivencia
- Ser amenazado por conocimientos y el eliminado sea el amenazado por convivencia.
- Ser amezado por convivencia y el eliminado sea el amenazado por conocimientos.

Luego :

$$P(B_{s-1}) = \prod_{i=1}^{s-1} [(1 - a_i) \cdot (1 - p_i) + a_i \cdot (1 - q_i) + (1 - a_i) \cdot p_i \cdot q_i]$$

Finalmente:

$$F_s = [a_s \cdot q_s + (1 - a_s) \cdot p_s \cdot (1 - q_s)] \cdot \prod_{i=1}^{s-1} [(1 - a_i) \cdot (1 - p_i) + a_i \cdot (1 - q_i) + (1 - a_i) \cdot p_i \cdot q_i]$$

3. Sea  $N$  el número de semanas dentro de la sala-estudio luego la esperanza viene dada por:

$$E(N) = \sum_{j=1}^{K-4} E(N|\text{Es eliminado en } j) \cdot P(\text{Es eliminado en } j) = \left( \sum_{j=1}^{K-4} j \cdot F_j \right)$$

4. Utilizando el resultado de la parte 2, se tiene que :

$$P(\text{ser finalista}) = P(B_{K-4}) = \prod_{i=1}^{K-4} [(1 - a_i) \cdot (1 - p_i) + a_i \cdot (1 - q_i) + (1 - a_i) \cdot p_i \cdot q_i]$$

5. La probabilidad de ser el ganador depende de si Valero está o no entre los finalistas concurso. Condi-  
cionando sobre este evento:

$$P(\text{ganar}) = P(\text{ganar}|\text{es finalista}) \cdot P(\text{es finalista}) + P(\text{ganar}|\text{no es finalista}) \cdot P(\text{no es finalista})$$

$$P(\text{ganar}) = P(\text{ganar}|\text{es finalista}) \cdot P(\text{es finalista}) + 0$$

La probabilidad de ser finalista fue calculada en la parte 4. La probabilidad de ganar dado que está en la final se calcula de la siguiente manera. Definamos la variable  $t_i$  como el tiempo que demora el alumno  $i$  en terminar el examen.

Para ser el ganador se pueden dar las siguientes situaciones:

- Ser el primero en terminar y contestar correctamente :

$$P_1 = P(t_{Tony} < \text{resto de los } t_i) \cdot P(\text{conteste bien}) = \frac{\mu}{4 \cdot \mu} \cdot (1 - r) = \frac{1}{4} \cdot (1 - r)$$

- Ser el segundo en terminar, que el primero responda mal y Valero bien :

$$P_2 = \frac{3 \cdot \mu}{4 \cdot \mu} \cdot r \cdot \frac{\mu}{3 \cdot \mu} \cdot (1 - r) = \frac{1}{4} \cdot r \cdot (1 - r)$$

- Ser el tercero en terminar, que los dos primeros repondan mal y Valero bien :

$$P_3 = \frac{3 \cdot \mu}{4 \cdot \mu} \cdot r \cdot \frac{2 \cdot \mu}{3 \cdot \mu} \cdot r \cdot \frac{\mu}{2 \cdot \mu} \cdot (1 - r) = \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot (1 - r)$$

- Ser el último en terminar, que los 3 primeros respondan mal y Valero bien:

$$P_4 = \frac{3 \cdot \mu}{4 \cdot \mu} \cdot r \cdot \frac{2 \cdot \mu}{3 \cdot \mu} \cdot r \cdot \frac{\mu}{2 \cdot \mu} \cdot r \cdot (1 - r) = \frac{1}{4} \cdot r^3 \cdot (1 - r)$$

Luego:

$$P(\text{ganar}|\text{es finalista}) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

Finalmente:

$$P(\text{ganar}) = (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) \cdot \prod_{i=1}^{K-4} [(1 - a_i) \cdot (1 - p_i) + a_i \cdot (1 - q_i) + (1 - a_i) \cdot p_i \cdot q_i]$$

Consultas y/o errores a :  
Patricio Hernández G.  
shernand@ing.uchile.cl