



Clase Auxiliar 14 de Junio, 2005
Nacimiento y Muerte

Problema 1

En Estados Unidos existen dos partidos políticos que concentran la gran mayoría de las preferencias electorales (alrededor del 95 %): el partido demócrata y el republicano. Por lo tanto, supondremos que la gente sólo vota por alguno de estos dos partidos.

Se sabe que la población electoral norteamericana es bastante flexible y ocasionalmente cambia sus preferencias electorales, de acuerdo a las circunstancias. Por ello, supondremos que un votante republicano (que vota por ese partido) cambiará su preferencia, pasando a ser un votante demócrata en un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido de media $\frac{1}{\lambda}$. Por su parte, un votante demócrata pasará a ser un votante republicano en un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido de media $\frac{1}{\mu}$. Suponga que el total de la población electoral de Estados Unidos es de tamaño N .

1. Modele la dinámica de la población electoral de Estados Unidos (el número de votantes demócratas en cada instante) como una cadena de Markov en tiempo continuo. Dibuje el diagrama de estados con las tasas de transición respectivas.
2. Calcule las probabilidades estacionarias. ¿Cuál es la probabilidad que una elección sea ganada por el partido demócrata en el largo plazo? Suponga que el número total de votantes es N .
3. Para el caso $\lambda = \mu$, muestre que la distribución de las probabilidades estacionarias es binomial de parámetros N , $1/2$. Interprete el resultado. Entregue la esperanza del número de votantes demócratas en el largo plazo y la probabilidad que una elección sea ganada por el partido demócrata.
4. **(Propuesto)** En el mismo modelo anterior ahora sabemos que una persona nace independiente de todo lo demás, de acuerdo a un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido de media $\frac{1}{a}$. De la misma manera una persona muere de acuerdo a un tiempo exponencialmente distribuido de media $\frac{1}{b}$. Si cada individuo que nace tiene iguales posibilidades de ser republicano o demócrata, modele la situación anterior como una cadena de Markov de tiempo continuo.

Problema 2

La banda criolla “Jorge y los Markovianos” finalmente han alcanzado el éxito a nivel nacional. Es así como se aprestan a realizar un concierto en el Estadio Nacional a modo de celebración. Jorge como buen alumno de industrias ocupará sus conocimientos para estudiar la dinámica del número de personas que asiste al concierto. Jorge sabe que sus fanáticos son de dos tipos específicos. El primer grupo llegará al estadio de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa β . Una persona de este tipo es tal que si llega al estadio y encuentra este con su capacidad nominal completa (suponga esta capacidad = N personas) se retirará indignado.

Sin embargo, existe otro tipo de fanático a los que no les importa ir a ver tocar a Jorge sino que se motivan de acuerdo a la gran afluencia de público. Se puede suponer que los tiempos entre llegadas este grupo están exponencialmente distribuidos y dependen linealmente del número de personas que ya se encuentran en el estadio. De esta manera, el tiempo esperado hasta que llegue el siguiente de estos fan, cuando hay solo una persona en el estadio, es $\frac{1}{\lambda}$, mientras que si hay i es $\frac{1}{\lambda-i}$. A este grupo no les interesa que el estadio ya haya

rebasado su capacidad, dado que debido a la falta de seguridad ingresan al recinto de todas formas hasta que éste está por reventar, lo que ocurre cuando el número de personas es $3N$.

Finalmente se tiene, que independiente del tipo de fan que se trate, éste se aburre y regresa del estadio en un tiempo exponencialmente distribuido de media $\frac{1}{\mu}$. Suponga para efectos de este problema que el repertorio de Jorge no se acaba nunca.

1. Modele el número de personas en el recinto como un proceso de nacimiento y muerte. ¿Cuál es la condición de estacionaridad?
2. Calcule una expresión que le permita calcular las probabilidades estacionarias.
3. (**Propuesto**) Si $N=3$, $\lambda = \beta = 1$ y $\mu = 2$, determine la proporción del tiempo tal que no pueden ingresar al estadio fanáticos del primer tipo.

Problema 3

Un centro de información telefónica cuenta con dos telefonistas cuyo tiempo de atención de llamadas es idénticamente distribuido y corresponde a una distribución exponencial de media igual a 1 minuto.

Dado que la operación de este call center está recién comenzando, no se cuenta con suficientes datos históricos como para determinar la distribución de probabilidad de la entrada de llamadas, aunque se puede suponer que los tiempos entre estas son exponenciales. Además, en los pocos días de funcionamiento se ha advertido que el 10% del tiempo ambas operadoras están desocupadas.

Si una persona llama y ambas operadoras están ocupadas su llamada quedará en espera hasta que alguna se desocupe y pueda atenderlo. Suponiendo que no existe una restricción sobre el número de llamadas que pueden quedar en espera, y que los clientes son infinitamente pacientes, responda:

1. ¿Qué condición hay que imponer sobre la tasa de entrada de llamadas para que exista estado estacionario?
2. Determine la tasa de entrada de llamadas (λ).
3. Calcule el número promedio de llamadas en espera y el tiempo promedio de espera de un cliente antes de ser atendido.

Suponga ahora que las operadoras cuando ven que hay llamadas en espera apuran las atenciones. Los tiempos de atención siguen siendo variables aleatorias exponenciales, pero ahora la tasa con que una operadora atiende a un cliente cuando hay i clientes esperando es $i \cdot \mu$.

4. ¿Qué condición hay que imponer sobre la tasa de entrada de llamadas para que exista estado estacionario? Explique.
5. Determine la ecuación que permitiría calcular la tasa de entrada de llamadas λ .