



Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: P. Rey, D. Sauré, R. Epstein.
Aux : C. Berner, M. Guajardo, A. Neely, D. Yung

Clase Auxiliar 19 de Abril, 2005
Procesos de Poisson

Problema 1

1. Debemos recordar que la unidad de tiempo en esta pregunta son los partidos. Consideremos los siguientes procesos de conteo:

$N_A(t)$ Número de goles anotados por el equipo A hasta t

$N_B(t)$ Número de goles anotados por el equipo B hasta t

Entonces:

$$\begin{aligned}P[\text{A Gane } 2 \times 1 \text{ a B}] &= P[N_A(1) = 2 \wedge N_B(1) = 1] \\&= P[N_A(1) = 2] \cdot P[N_B(1) = 1] \\&= \frac{\lambda_A^2 e^{-\lambda_A}}{2!} \cdot \frac{\lambda_B e^{-\lambda_B}}{1!}\end{aligned}$$

Hemos utilizado la independencia de los procesos de conteo y la distribución de Poisson de estos.

2. De acuerdo a lo hecho en clases reinterpretemos esta probabilidad como sigue:

Sea: T_x el tiempo de llegada de uno de los goles y T_y el tiempo de llegada del otro gol. Sabemos que la distribución de estos tiempos es Uniforme entre 0 y $\frac{1}{2}$ (revisar materia del curso). De esta forma la probabilidad que debemos calcular es (de acuerdo a la interpretación que acordamos en la clase auxiliar):

$$\begin{aligned}P[\text{Primer gol antes de 15 minutos y el segundo entre los 15 y los 30}] &= 2 \cdot P[T_X < \frac{1}{6} \wedge \frac{2}{6} > T_Y > \frac{1}{6}] \\&= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\end{aligned}$$

El 2 que antepone la probabilidad es porque debemos considerar en caso en que T_Y es menor que T_X .

3. Dado que los procesos de A y B son independientes, la probabilidad a calcular no es afectada por lo que pasa con B. Entonces:

$$\begin{aligned}P[\text{A hace 3 goles en los 30 primeros minutos del segundo tiempo}] &= P[N_A(\frac{5}{6}) - N_A(\frac{3}{6}) = 3] \\&= P[N_A(\frac{2}{6}) = 3] \\&= \frac{(\lambda_A \cdot \frac{1}{3})^3 \cdot e^{-\lambda_A \cdot \frac{1}{3}}}{3!}\end{aligned}$$

4. Consideramos el inicio del tiempo de alarge como un nuevo origen(incrementos estacionarios). Así, la probabilidad requerida es:

$$\begin{aligned}
 P[\text{Alarge dure más de 45 minutos}] &= P[N_A(\frac{1}{2}) = 0 \wedge N_B(\frac{1}{2}) = 0] \\
 &= \frac{e^{-\lambda_A \frac{1}{2}}}{0!} \cdot \frac{e^{-\lambda_B \frac{1}{2}}}{0!} \\
 &= e^{-(\lambda_A + \lambda_B) \frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Notamos que esta probabilidad podría haber sido calculada de la siguiente forma: Si estamos al principio del alarge sabemos que el tiempo de llegada del primer gol sigue una distribución $\exp(\lambda_A + \lambda_B)$ (debido a que se trata de la distribución del mínimo de 2 exponenciales). Entonces solo debemos calcular la probabilidad que este tiempo sea mayor a $\frac{1}{2}$, que es el resultado obtenido.

5. Para calcular esta probabilidad debemos condicionar un par de veces. Sean:

BG = B gana.

1A = Primer gol es anotado por A.

1B = Primer gol es anotado por B.

2A = segundo gol es anotado por A.

2B = segundo gol es anotado por B.

Entonces:

$$\begin{aligned}
 P[BG] &= P[BG|1A] \cdot P[1A] + P[BG|1B] \cdot P[1B] \\
 &= P[BG|1A] \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + P[BG|1B] \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}
 \end{aligned}$$

Pero:

$$\begin{aligned}
 P[BG|1A] &= P[BG|1A|2A] \cdot P[2A] + P[BG|1A|2B] \cdot P[2B] \\
 &= P[BG|1A|2A] \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + P[BG|1A|2B] \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \\
 &= 0 \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + P[BG|1B] \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}
 \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
 P[BG|1B] &= P[BG|1B|2A] \cdot P[2A] + P[BG|1B|2B] \cdot P[2B] \\
 &= P[BG|1B|2A] \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + P[BG|1B|2B] \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \\
 &= P[BG|1A] \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + 1 \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}
 \end{aligned}$$

Utilizando las relaciones encontradas vemos que:

$$\begin{aligned}
 P[BG|1A] &= \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \cdot [P[BG|1A] \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + 1 \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}] \\
 &= \frac{\lambda_B^2}{\lambda_A^2 + \lambda_B^2 + \lambda_A \cdot \lambda_B}
 \end{aligned}$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación de más arriba obtenemos:

$$P[BG] = \frac{\lambda_B^2}{\lambda_A^2 + \lambda_B^2 + \lambda_A \cdot \lambda_B} \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + \left[\frac{\lambda_B^2}{\lambda_A^2 + \lambda_B^2 + \lambda_A \cdot \lambda_B} \right] \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + 1 \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}$$

Problema 2

1. Supongamos que se decide colocar N camas en el hospital. Además consideremos que el día comienza en $t=0$ (7:00 am) y termina en $t=T$ (7:00am del día siguiente) De esta forma, la probabilidad de atender a todos los pacientes graves será:

$$P_N[\text{Lleguen a lo más N pacientes graves}] = \sum_{i=0}^N \frac{(\lambda_1 T)^i e^{-\lambda_1 T}}{i!}$$

Donde λ_1 es la tasa de llegada de los pacientes graves (2 al día). Entonces buscamos un N^* tal que:

$$N^* = \inf \left\{ N | N \in \{0, 1, \dots\} \wedge \sum_{i=0}^{N^*} \frac{(\lambda_1 T)^i e^{-\lambda_1 T}}{i!} \geq 0,95 \right\}$$

2. El paciente morirá o no dependiendo del instante en que llego. Si llego antes de las $t = 5$ (desde ahora en adelante trabajaremos en minutos) entonces muere con probabilidad 1 (del enunciado). Si llego después de las $t = 5$ sobrevive. Ahora Supongamos que el tipo llego en el instante X ($0 \leq X \leq 60$) Entonces:

$$P[\text{Muerto} | \text{Llego en } X] = 1_{X \leq 5}$$

Si embargo debemos descondicionar. Para esto vemos que la distribución condicional de las llegadas de poisson hasta un instante t se distribuyen uniformemente entre 0 y T . Entonces tendremos que:

$$\begin{aligned} P[\text{Muerto}] &= \int_0^{60} 1_{X \leq 5} \cdot \frac{1}{60} dX \\ &= \int_0^5 1_{X \leq 5} \cdot \frac{1}{60} dX + \int_5^{60} 1_{X \leq 5} \cdot \frac{1}{60} dX \\ &= \int_0^5 \frac{1}{60} dX + \int_5^{60} 0 \cdot \frac{1}{60} dX \\ &= \frac{5}{60} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

3. Esto es básicamente es la probabilidad que lleguen 5 pacientes graves seguidos de 5 pacientes leves. Sin embargo dado que:

$$P[\text{Llegue un paciente grave antes que uno leve}] = \frac{\lambda_g}{\lambda_g + \lambda_l}$$

donde λ_2 es la tasa de llegada de pacientes leves al consultorio, y considerando la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial, tendremos que la probabilidad que buscamos, P , es:

$$\left(\frac{\lambda_g}{\lambda_g + \lambda_l} \right)^5 \cdot \left(\frac{\lambda_l}{\lambda_g + \lambda_l} \right)^5$$

4. Por la pérdida de memoria de la exponencial el mundo "comienza" cuando el tipo inicia su ida al baño. Por otro lado, debido a la suma de procesos de poisson, el proceso de llegada de pacientes al consultorio será en si un proceso de poisson de tasa $\lambda_g + \lambda_l$, y por lo tanto Y, el tiempo de llegada entre clientes, seguirá una distribución exponencial de parámetro $\lambda_g + \lambda_l$. Entonces el tiempo máximo, T^* , de demora debe ser tal que :

$$P[Y \geq T^*] = e^{-(\lambda_g + \lambda_l) \cdot T^*} = 0,95$$

Entonces:

$$T^* = -\frac{\ln(0,95)}{\lambda_g + \lambda_l}$$

Problema 3

1. Como los meses son intervalos disjuntos de tiempo estas probabilidades son independientes. La esperanza del número de fallas será $30 \cdot (\lambda_D + \lambda_A)$ en 1 mes.
2. Esta es la típica pregunta tipo "¿Cuál es la probabilidad que pase A antes de B?". Si T_D = tiempo en que ocurre la primera falla domiciliaria y T_A = tiempo en que ocurre la primera falla de alumbrado público sabemos que $T_D \rightsquigarrow \exp(\lambda_D)$ y $T_A \rightsquigarrow \exp(\lambda_A)$

$$P(T_D < T_A) = \frac{\lambda_D}{\lambda_D + \lambda_A}$$

3. Una manera de verlo es darse cuenta que los 3 procesos involucrados son independientes, y proceder a calcular directamente la esperanza. Otra manera es calcular la esperanzas de las fallas condicionado al tiempo que dure la reparación y luego calcular lo que nos piden. Si T_r es el tiempo que dura la reparación en meses:

$$\begin{aligned} E[\text{N fallas Domiciliarias} / T_r = t] &= \lambda_D \cdot \frac{t}{24} \\ \Rightarrow E[\text{N fallas Domiciliarias}] &= \int_0^\infty \frac{\lambda_D \cdot t}{24} \cdot \frac{1}{T} \exp^{-\frac{1}{T} \cdot t} dt = \frac{\lambda_D}{24} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{T} \cdot t \cdot \exp^{-\frac{1}{T} \cdot t} dt \\ &\Rightarrow E[\text{N fallas Domiciliarias}] = \frac{\lambda_D \cdot T}{24} \\ &\Rightarrow E[\text{N fallas Alumbrado público}] = \frac{\lambda_A \cdot T}{24} \end{aligned}$$

4. En este caso los costos están divididos en 2 tramos: Si N_A = Número de fallas de Alumbrado público son menores que R se pagará $s_1 \cdot R$, mientras que si $N_A > R$ se pagará $s_1 \cdot R + s_2 \cdot (N_A - R)$. Así el problema de minimización queda:

$$\begin{aligned} \min_R \left\{ s_1 \cdot R \cdot P(N_A \leq R) + \sum_{k=R+1}^{\infty} [s_1 \cdot R + s_2 \cdot (k - R)] \cdot P(N_A = k) \right\} \\ \min_R \left\{ s_1 \cdot R + \sum_{k=R+1}^{\infty} s_2 \cdot (k - R) \cdot \frac{(\lambda_A \cdot 30)^k \exp^{-\lambda_A \cdot 30}}{k!} \right\} \end{aligned}$$

Dudas, consultas y comentarios a
dyung@ing.uchile.cl