



Clase Auxilliari 29 de Marzo de 2005  
Programación Dinámica Determinística

## Problema 1

Para desarrollar este problema supondremos que los buses partirán al comienzo del minuto designado de partida, justo después de la llegada de la cantidad  $d_t$  de pasajeros. Además supondremos que los pasajeros abordan los buses de acuerdo a su orden de llegada. De acuerdo a esto podemos plantear el siguiente modelo de programación dinámica:

1. **Etapas:**

- $t = 1, \dots, T$  c/u de los minutos.

2. **Variable de estado:**

- $S_i^t$ , número de personas que al comienzo del minuto  $t$  llevan esperando  $i$  minutos para abordar el bus. ( $i > 0$ ,  $t \in \{1, \dots, T\}$ ,  $i < t$ ).
- $B_t$ , el número de buses disponibles, al comienzo del minuto  $t$  (antes de la decisión).

3. **Variable de decisión:**

- $N_t$ , número de buses a despachar al comienzo del minuto  $t$ .

4. **Recursión:**

$$S_i^{t+1} = S_{i-1}^t - \min \left\{ S_{i-1}^t, \max\{0, K \cdot N_t - \sum_{k=i}^{t-1} S_k^t\} \right\} \quad \forall i > 1$$

$$S_1^{t+1} = d_t - \min \left\{ d_t, \max\{0, K \cdot N_t - \sum_{k=1}^{t-1} S_k^t\} \right\}$$

$$B_{t+1} = B_t - N_t$$

5. **Función objetivo:** Minimizamos los costos acumulados hacia el futuro, asumiendo que tomaremos las decisiones óptimas desde el próximo período en adelante:

$$V_t^*(\vec{S}^t, B_t) = \max_{0 \leq N_t \leq B_t} \left[ P \cdot \min\{N_t \cdot K, d_t + \sum_{k=1}^{t-1} S_k^t\} \right. \\ \left. - F \cdot N_t - \sum_{k=1}^{t-1} E_k \cdot \min \left\{ S_k^t, \max\{0, K \cdot N_t - \sum_{i=k+1}^{t-1} S_i^t\} \right\} \right. \\ \left. + V_{t+1}^*(\vec{S}^{t+1}, B_{t+1}) \right]$$

## 6. Condiciones de Borde:

- $\vec{S}^1 = \vec{0}$
- $V_{T+1}^* = -H \cdot \sum_{k=1}^T S_k^{T+1}$
- $B_1 = B$

## Problema 2

### 1. MODELO GENERAL

**Etapas:**  $i = 1, \dots, N$  c/u de los subsistemas

**Variable de estado:**  $S_i$ , \$ disponible al inicio de la etapa i-ésima (antes de decidir el número de unidades de reserva del subsistema i).  $S_i \in [0, X]$

**Variable de decisión:**  $D_i$  Número de unidades de reserva para el subsistema i-ésimo,  $D_i \in [0, [\frac{S_i}{C_i}]_-]$  (restricción de la maximización).

**Recursión:**  $S_{i+1} = S_i - D_i \cdot C_i$

**Función objetivo:** Buscaremos maximizar la probabilidad que no falle el sistema (y, por lo tanto, que no falle ninguno de los subsistemas)

$$V_i^*(S_i) = \max_{0 \leq D_i \leq [\frac{S_i}{C_i}]_-} \left[ P_i(D_i) \cdot V_{i+1}^*(S_i - D_i \cdot C_i) \right]$$

### Condiciones de Borde:

- $S_1 = X$
- $V_{N+1}^* = 1$  (Valor residual, neutro de la función beneficio)

### 2. CASO PARTICULAR

#### Subsistema 3

\$	0	1	2	$V^*(\$)$	$D^*$
0	0,7	i	i	0,7	0
100	0,7	i	i	0,7	0
200	0,7	0,9	i	0,9	1
300	0,7	0,9	i	0,9	1
400	0,7	0,9	0,98	0,98	2
500	0,7	0,9	0,98	0,98	2
600	0,7	0,9	0,98	0,98	2

#### Subsistema 2

\$	0	1	2	$V^*(\$)$	$D^*$
0	$0,6 \cdot 0,7$	i	i	0,42	0
100	$0,6 \cdot 0,7$	i	i	0,42	0
200	$0,6 \cdot 0,9$	i	i	0,54	0
300	$0,6 \cdot 0,9$	$0,85 \cdot 0,7$	i	0,595	1
400	$0,6 \cdot 0,98$	$0,85 \cdot 0,7$	i	0,595	1
500	$0,6 \cdot 0,98$	$0,85 \cdot 0,9$	i	0,765	1
600	$0,6 \cdot 0,98$	$0,85 \cdot 0,9$	$0,95 \cdot 0,7$	0,765	1

Para el subsistema 1 es directo que el estado a analizar es  $S_1=\$600$ . Si comparan las opciones de decisión, se llega a que la decisión óptima para esta etapa es  $D_1^*=1$ , con valor en la F.O. de 0,6885. Luego, el vector de decisiones óptimas es:  $\vec{V}^* = (1,1,1)$ .

### Problema 3

#### 1. MODELO DETERMINÍSTICO

##### **Etapas:**

Cada uno de los períodos  $t$  ( $t \in 1, \dots, T$ )

##### **Variable de estado:**

$S_t$  = años de uso de la máquina disponible al inicio del período  $t$ .

##### **Variables de decisión:**

$$X_t = \begin{cases} - & \text{No reemplazo} \\ 0 & \text{Reemplazo por máquina de 0 años,} \\ 1 & \text{Reemplazo por máquina de 1 año,} \\ \vdots & \\ n & \text{Reemplazo por máquina de n años,} \end{cases}$$

##### **Función de beneficio (incluye recursión):**

$$f_t(S_t, X_t) = \begin{cases} C_{S_t} + f_{t+1}^*(S_t + 1) & \text{En caso de no reemplazar, } X_t = - \\ C_{X_t} + I_{X_t} - V_{S_t} + f_{t+1}^*(X_t + 1) & \text{En caso de reemplazar, } X_t = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$f_t^*(S_t) = \min_{X_t} f_t(S_t, X_t)$$

Donde  $f_t^*(S_t)$  = costo mínimo de la operación de la máquina desde el inicio del período  $t$  hasta el final, es decir, hasta  $T$  si la antigüedad del equipo es  $S_t$ .

##### **Condiciones de borde y función objetivo para la primera etapa:**

$$\begin{aligned} f_{T+1}(S_{T+1}) &= -V_{S_{T+1}} \\ f_1^* &= \min_{X_1=0, 1, 2, \dots} \left\{ I_{X_1} + C_{X_1} + f_2^*(X_1 + 1) \right\} \end{aligned}$$

Dudas, consultas y comentarios a  
crberner@ing.uchile.cl