



Universidad de Chile  
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa  
Profs: P. Rey, D. Sauré, R. Epstein.  
Aux : C. Berner, M. Guajardo, A. Neely, D. Yung

Clase Auxiliar 22 de Marzo, 2005

## Árboles de Decisión

### Problema 1

1. Para desarrollar el problema necesitamos conocer ciertas probabilidades. Sean:

T+ = Test indica pieza mala.

T- = Test indica pieza buena.

P = Parar de producir.

NP = continuar la producción.

A = Empresa tipo A.

B = Empresa tipo B.

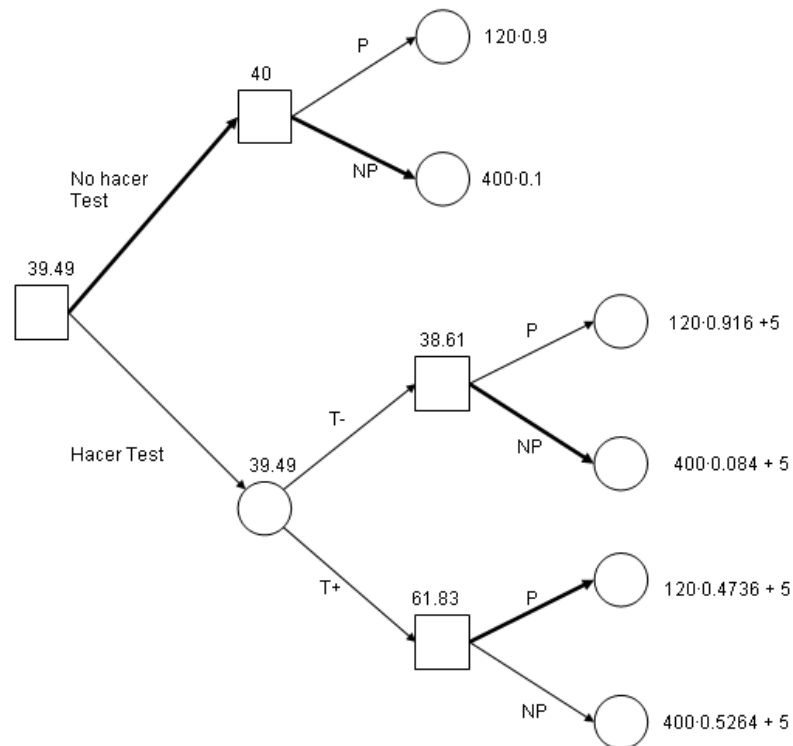
De esta forma se tiene que:

$$\begin{aligned}P[T+|A] &= 0,02 = 1 - P[T-|A] \\P[T+|B] &= 0,2 = 1 - P[T-|B] \\P[T+] &= P[T+|A] \cdot P[A] + P[T+|B] \cdot P[B] \\&= 0,02 \cdot 0,9 + 0,2 \cdot 0,1 \\&= 0,038 \\ \Rightarrow P[T-] &= 0,962\end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}P[A|T+] &= \frac{P[T+|A]P[A]}{P[T+]} = \frac{0,018}{0,038} = 0,4736 = 1 - P[B|T+] \\P[A|T-] &= \frac{P[T-|A]P[A]}{P[T-]} = \frac{0,882}{0,962} = 0,916 = 1 - P[B|T-]\end{aligned}$$

El árbol de decisión asociado se muestra en la figura.

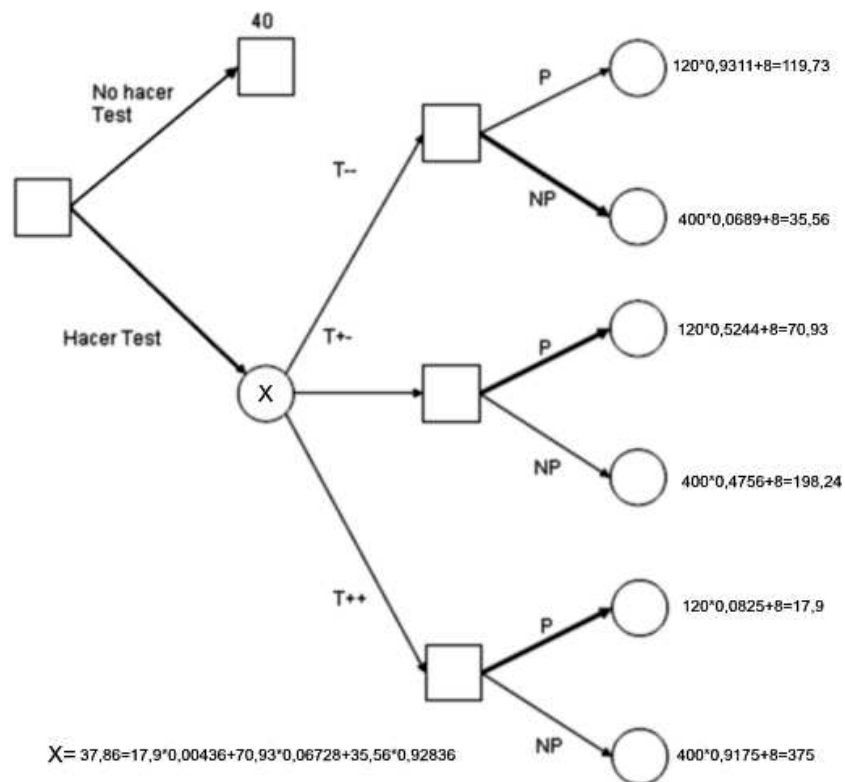


Noten que conviene realizar el test.

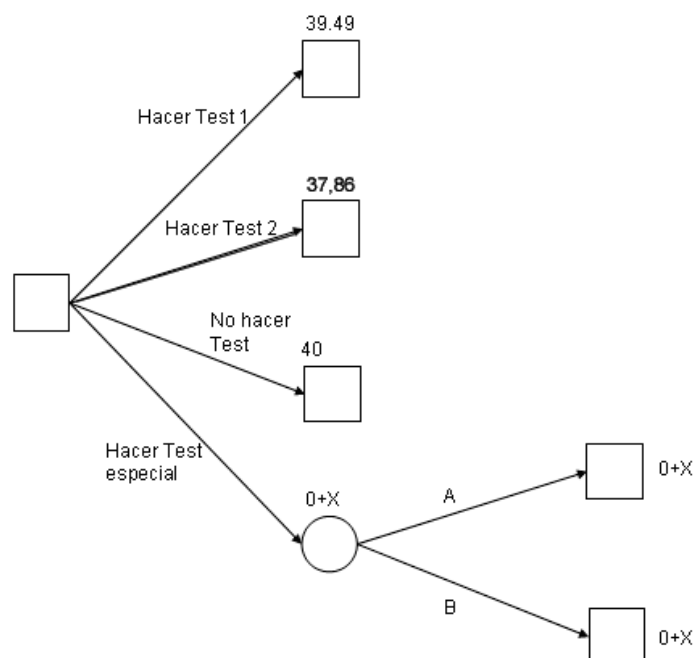
2. La idea es exactamente la misma, solamente que debemos calcular las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned}
 P[T + +] &= 0,0004 \cdot 0,9 + 0,04 \cdot 0,1 = 0,00436 \\
 P[T - -] &= 0,9604 \cdot 0,9 + 0,64 \cdot 0,1 = 0,92836 \\
 P[T + -] &= 0,06728 \\
 P[A|T + +] &= \frac{0,0004 \cdot 0,9}{0,00436} = 0,0825 = 1 - P[B|T + +] \\
 P[A|T - -] &= \frac{0,9604 \cdot 0,9}{0,92836} = 0,9311 = 1 - P[B|T - -] \\
 P[A|T + -] &= \frac{(2 \cdot 0,98 \cdot 0,02) \cdot 0,9}{0,06728} = 0,5244 = 1 - P[B|T + -]
 \end{aligned}$$

El árbol de decisión asociado se muestra en la figura.



3. Para ver cual es el valor de la informaci3n perfecta considere un test que clasifica correctamente a las empresas y cuyo valor es  $X$ . El 1rbo1 de decisi3n asociado se muestra en la figura.



Entonces el valor de este test especial ser1 37.86.

## Problema 2

- El problema se puede modelar con el árbol de la Figura 1 (los pagos están expresados en M US\$). Luego, **Bernotti** debe intentar eludir a *el galáctico* y rematar hacia la derecha.

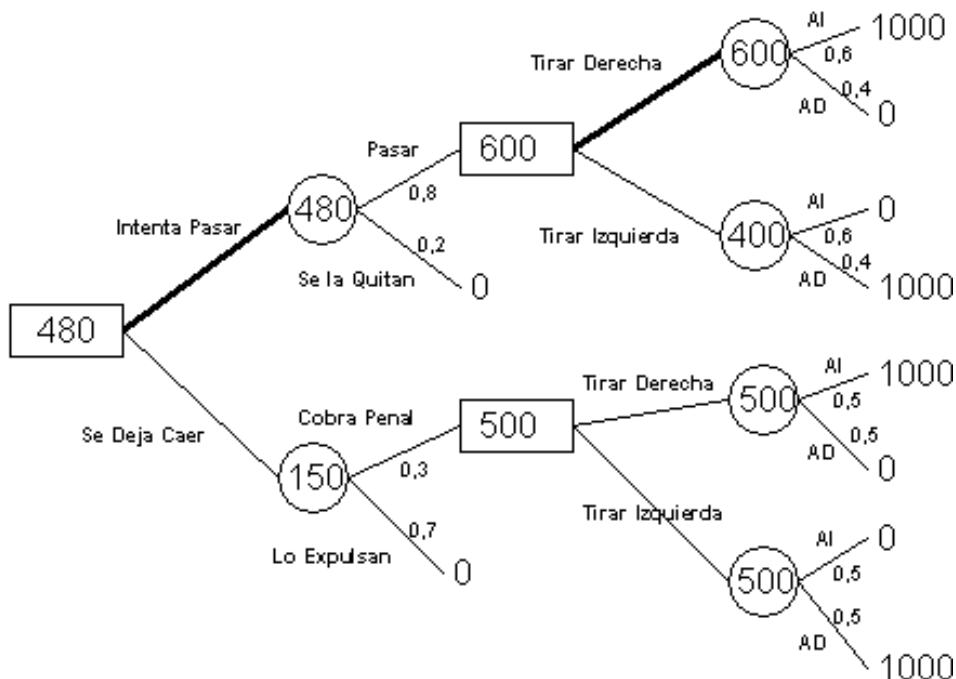


Figura 1: Árbol Sin Consejos de el Gurú

- Para esto debemos comparar el retorno de jugar sin los consejos de *el Gurú* con los que se podrían obtener gracias a la ayuda de sus predicciones, debemos calcular las probabilidades condicionales.

Sean:

- $TI_p$  = *el Gurú* dice que el arquero se tira a la izquierda si es penal..
- $TD_p$  = *el Gurú* dice que el arquero se tira a la derecha si es penal.
- $TI_m$  = *el Gurú* dice que el arquero se tira a la izquierda si es *mano a mano*.
- $TD_m$  = *el Gurú* dice que el arquero se tira a la derecha si es *mano a mano*.
- AD = el arquero se tira a la derecha.
- AI = el arquero se tira a la izquierda.

Es necesario notar que al ser distinta la probabilidad de que el arquero se tire a la izquierda dependiendo si es un penal o un *mano a mano*, la probabilidad de que *el Gurú* diga que el arquero se lanza a la izquierda es distinta para el caso de un penal y el de un *mano a mano* (0,6 y 0,68 respectivamente), como se puede observar en el árbol de la Figura 2, esto a su vez produce distintas probabilidades condicionales ( $P[AI/TI]$ ) en cada sub-árbol (*se deja caer* o *intenta pasar*) .

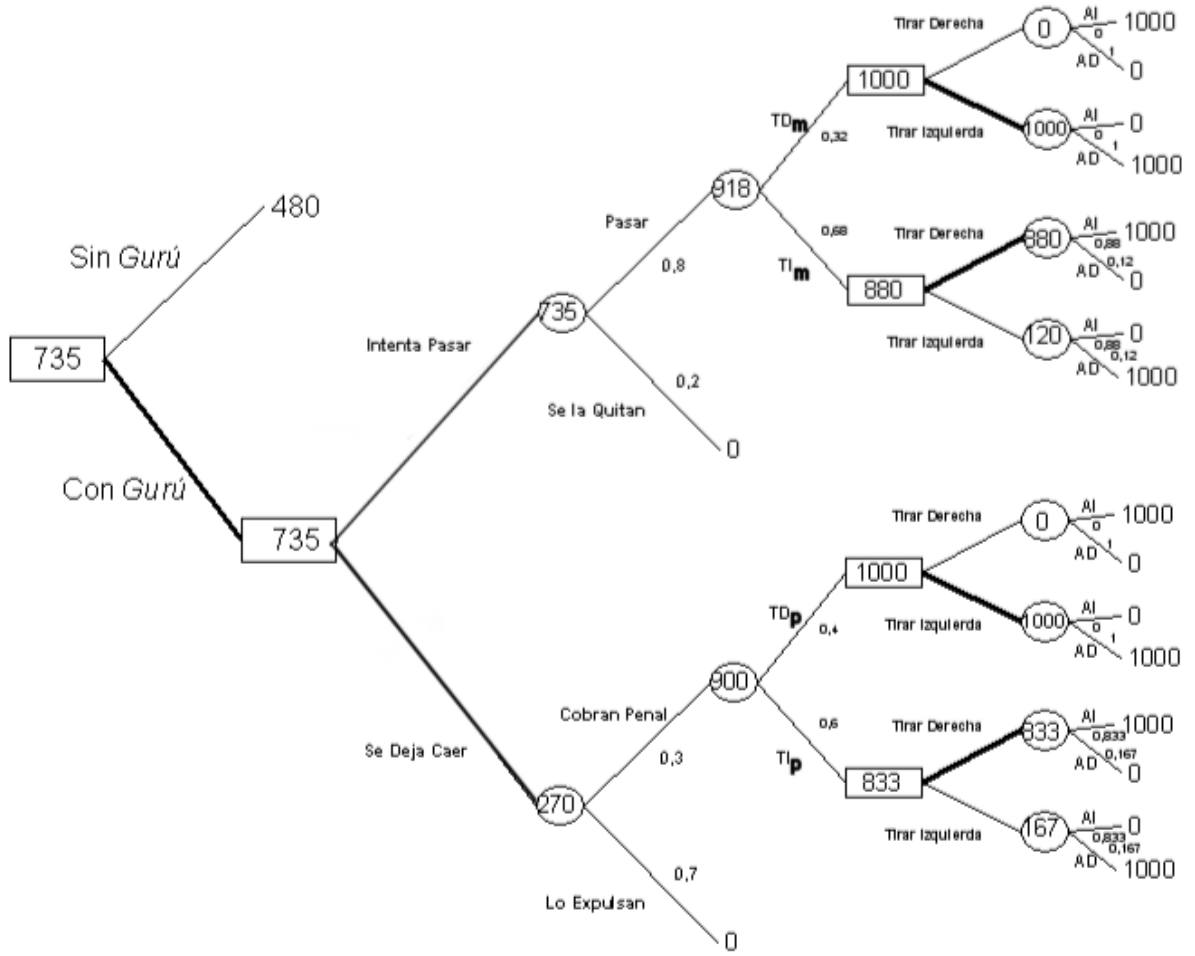


Figura 2: Árbol Completo

De esta forma se tiene que, para el caso de un *mano a mano*:

$$\begin{aligned}
 P[TD_m|AD] &= 0,8 = 1 - P[TI_m|AD] \\
 P[TI_m|AI] &= 1 = 1 - P[TD_m|AI] \\
 P[TI_m] &= P[TI_m|AD] \cdot P[AD] + P[TI_m|AI] \cdot P[AI] \\
 &= 0,2 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,6 \\
 &= 0,68 \\
 \Rightarrow P[TD_m] &= 0,32
 \end{aligned}$$

Además:

$$P[AD|TD_m] = \frac{P[TD_m|AD]P[AD]}{P[TD_m]} = \frac{0,8 \cdot 0,4}{0,32} = 1 = 1 - P[AI|TD_m]$$

$$P[AI|TI_m] = \frac{P[TI_m|AI]P[AI]}{P[TI_m]} = \frac{1 \cdot 0,6}{0,68} = 0,88 = 1 - P[AD|TI_m]$$

y para el caso de un lanzamiento penal:

$$\begin{aligned}
 P[TD_p|AD] &= 0,8 = 1 - P[TI_p|AD] \\
 P[TI_p|AI] &= 1 = 1 - P[TD_p|AI] \\
 P[TI_p] &= P[TI_p|AD] \cdot P[AD] + P[TI_p|AI] \cdot P[AI] \\
 &= 0,2 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 \\
 &= 0,6 \\
 \Rightarrow P[TD_p] &= 0,4
 \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
 P[AD|TD_p] &= \frac{P[TD_p|AD]P[AD]}{P[TD_p]} = \frac{0,8 \cdot 0,5}{0,4} = 1 = 1 - P[AI|TD_p] \\
 P[AI|TI_p] &= \frac{P[TI_p|AI]P[AI]}{P[TI_p]} = \frac{1 \cdot 0,5}{0,6} = 0,833 = 1 - P[AD|TI_p]
 \end{aligned}$$

Como se observa en el árbol de la Figura 2, al equipo le conviene contratar a *el Gurú* y este puede cobrar hasta US\$735.000 - US\$ 480.000 = US\$255.000 por utilizar sus habilidades predictivas en beneficio del equipo de **Bernotti**.

Dudas, consultas y comentarios a  
dyung@ing.uchile.cl