Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: Pablo Rey, Antoine Sauré
Aux : P. Hernández, J. Muñoz, D. Sauré.

EXAMEN IN44A
Jueves 10 de Julio, 2003

## Problema 1

1. Hay que comparar los resultado teóricos de la atención mediante 2 sistemas M/M/1 con tasa de llegada $\frac{\lambda}{2}$ vs un sistema M/M/2 con tasa llegada $\lambda$. Gana la M/M/2, claro que no tiene sentido comparar el largo de las colas, sino que el tiempo medio en el sistema. Notamos que en esta pregunta comparamos aspectos "analíticos" de los sistemas de atención y no como distintas disciplinas de atención puedan afectar psicológicamente la percepción del cliente respecto al tiempo de espera o calidad de la atención.
2. Realizando supuestos grotescos podemos suponer que el tramo puede ser modelado como 3 colas M/M/1 que se distribuyen a los autos. El que una pista en particular parezca vacía simplemente representa las preferencias de los conductores al momento de elegir la pista a seguir. Ahora si conservo el flujo de llegada y quito una de las colas, facilmente puede ocurrir que la tasa de llegada de conductores supere la tasa de "atención efectiva" ( es decir $\lambda > 2 \cdot \mu$). Podemos pensar que antes el sistema se encontraba bien dimensionado ( es decir $\lambda < 3 \cdot \mu$), y que la diferencia entre las cargas que enfrentaban las distintas pistas se debián simplemente a que las preferencias de los conductores no los incentivaban a cambiar de pista a menos que las dos pistas usadas colapsaran.
3. Cualquiera de estas políticas de atención da lo mismo. Esto se debe a que el criterio de comparación es el tiempo medio en el sistema.
4. Respecto a las ampolletas:
   - Se distribuye exponencial de parámetro $\sum_{i=0}^{N} \mu_i$
   - Esta probabilidad es la siguiente:
   $$P = \frac{\mu_N}{\sum_{i=0}^{N} \mu_i}$$
   - La alternativa (1) no tiene sentido (por la pérdida de memoria de la distribución exponencial), por lo que escogería la (2).

## Problema 2

Sean $N_i$ el número de unidades vendidas en el período de ventas $i$ y $U_i$ las utilidades del período $i$.

1. Si en el periodo 2 se vendieron $n$ unidades del producto, calcule la esperanza de los ingresos del período 1 (considere $p_1$ y $p_2$ conocidos).

   Utilizando la formula de esperanza vemos que:

$$E[U_1|N_2 = n] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_1 \cdot P[N_1 = k|N_2 = n]$$

Ahora debemos calcular la distribucción condicional de las ventas del primer período. Usando Bayes y probabilidades totales:

$$\begin{aligned} P[N_1 = k|N_2 = n] &= \frac{P[N_2 = n|N_1 = k] \cdot P[N_1 = k]}{P[N_2 = n]} \\ &= \frac{P[N_2 = n|N_1 = k] \cdot P[N_1 = k]}{\sum_{i=0}^{\infty} P[N_2 = n|N_1 = i] \cdot P[N_1 = i]} \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} P[N_1 = k] &= \frac{(\lambda \cdot e^{-P_1})^k e^{-\lambda \cdot e^{-P_1}}}{k!} \\ P[N_2 = n|N_1 = k] &= \frac{(k \cdot e^{-P_2})^n e^{-k \cdot e^{-P_2}}}{n!} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} P[N_1 = k|N_2 = n] &= \frac{\frac{(k \cdot e^{-P_2})^n e^{-k \cdot e^{-P_2}}}{n!} \cdot \frac{(\lambda \cdot e^{-P_1})^k e^{-\lambda \cdot e^{-P_1}}}{k!}}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i \cdot e^{-P_2})^n e^{-i \cdot e^{-P_2}}}{n!} \cdot \frac{(\lambda \cdot e^{-P_1})^i e^{-\lambda \cdot e^{-P_1}}}{i!}} \\ &= \frac{\frac{k^n \cdot \left[\lambda \cdot e^{-(p_1 + e^{-p_2})}\right]^k}{k!}}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n \cdot \left[\lambda \cdot e^{-(p_1 + e^{-p_2})}\right]^i}{i!}} \\ &= \frac{\frac{k^n \cdot \boxed{\lambda}^k}{k!}}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n \cdot \boxed{\lambda}^i}{i!}} \end{aligned}$$

Reemplazando obtenemos que:

$$E[U_1|N_2 = n] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_1 \cdot \frac{\frac{k^n \cdot \boxed{\lambda}^k}{k!}}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n \cdot \boxed{\lambda}^i}{i!}}$$

2. Esto es:

$$\begin{aligned} E[U_3|N_2=n] &= \sum_{i=0}^{\infty} i\cdot p_3 \cdot \frac{\left[n\cdot e^{-p_3}\right]^i \cdot e^{-\left[n\cdot e^{-p_3}\right]}}{i!} \\ &= \left[n\cdot e^{-p_3}\right]\cdot p_3 \end{aligned}$$

3. Cuando consideramos sólo un período de ventas la ganancias esperadas (en función del precio a cobrar) vienen dadas por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} E[U_1] &= \sum_{i=0}^{\infty} i\cdot p_1 \cdot \frac{\left[\lambda\cdot e^{-p_1}\right]^i \cdot e^{-\left[\lambda\cdot e^{-p_1}\right]}}{i!} \\ &= \left[\lambda\cdot e^{-p_1}\right]\cdot p_1 \end{aligned}$$

Para calcular el precio óptimo derivamos e igualamos a 0.

$$\frac{d\left[\lambda\cdot e^{-p_1}\right]\cdot p_1}{dp_1} = 0 \Rightarrow p_1 = 1$$

Por lo tanto:

$$E[U_1] = \lambda\cdot e^{-1}$$

4. Cuando consideramos 2 períodos de venta la expresión de las utilidades en función de $p_1$ y $p_2$ es:

$$\begin{aligned} E[V_1=U_1+U_2] &= \sum_{i=0}^{\infty}\left[i\cdot p_1 + \sum_{j=0}^{\infty} j\cdot p_2\cdot\frac{\left[i\cdot e^{-p_2}\right]^j\cdot e^{-\left[i\cdot e^{-p_2}\right]}}{j!}\right]\cdot\frac{\left[\lambda\cdot e^{-p_1}\right]^i\cdot e^{-\left[\lambda\cdot e^{-p_1}\right]}}{i!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\left[i\cdot p_1 + i\cdot e^{-p_2}\cdot p_2\right]\cdot\frac{\left[\lambda\cdot e^{-p_1}\right]^i\cdot e^{-\left[\lambda\cdot e^{-p_1}\right]}}{i!} \\ &= \left[\lambda\cdot e^{-p_1}\right]\cdot\left[p_1 + e^{-p_2}\cdot p_2\right] \end{aligned}$$

Para encontrar los precios óptimos notamos que independiente de la tasa, el precio óptimo cuando queda un solo período de venta es $p^* = 1$ (parte anterior). Entonces la expresión anterior es equivalente a:

$$E[V_1] = \left[\lambda\cdot e^{-p_1}\right]\cdot\left[p_1 + e^{-1}\right]$$

Para calcular el precio $p_1$ óptimo derivamos e igualamos a 0.

$$\frac{d\left[\lambda\cdot e^{-p_1}\right]\cdot\left[p_1+e^{-1}\right]}{dp_1} = 0 \Rightarrow p_1 = 1 - e^{-1}$$

Con esto la utilidad esperada en 2 períodos de venta es:

$$E[V_1] = \left[\lambda\cdot e^{-(1-e^{-1})}\right]$$

5. Primero notamos que la única información relevante en un período de venta dado es cuantos productos se vendieron en el período anterior.

   - Estado
     $E_k$ Número de productos vendidos el período $k-1$.

   - Decisión
     $p_k$ precio de venta del producto en el período $k$.

   - V. Aleatoria
     $N_k$ Número de compradores en el período $k$.

   - Recursión
     $E_{k+1} = N_k$

   - Condiciones de borde
     $V_{T+1}(E_{T+1}) = 0$
     $E_0 = \lambda$

   - Función de Beneficios

$$V_k(E_k, p_k) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[ i \cdot p_k + V_{k+1}^*(i) \right] \cdot \frac{\left[E_k \cdot e^{-p_k}\right]^i \cdot e^{-\left[E_k \cdot e^{-p_k}\right]}}{i!}$$

     con:

$$V_k^*(E_k) = \max_{p_k}\{V_k(E_k, p_k)\}$$

## Problema 3

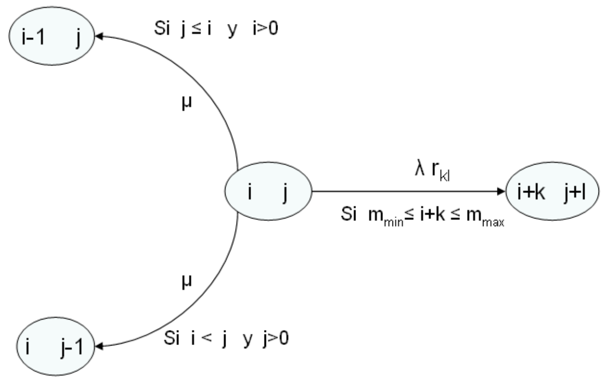
1. Esto es la probabilidad que una binomial de parámetros $i+j$ y $p$ tome el valor $i$.

$$q_{ij} = \binom{i+j}{i} p^i \cdot (1-p)^j$$

2. Debemos multiplicar por la probabilidad que en el vuelo vengan exactamente $i+j$ personas. Esto es:

$$r_{ij} = \begin{cases} q_{ij} \cdot V_{i+j} & si \quad m_{min} \leq i+j \leq m_{max} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

3. Notamos que debemos modelar el número de personas en cada fila, y no el número de personas en el sistema. Consideremos un estado genérico y vemos cuales son las transiciones posibles y bajo que condiciones se realizan. Las transiciones posibles (y las condiciones de ocurrencia) se muestran en el siguiente dibujo.




4. El número de personas que llega al aeropuerto sigue un proceso de Poisson compuesto de tasa $\lambda$ y esperanza del batch $E[N]$:

$$E[N] = \sum_{i=m_{min}}^{m_{max}} i \cdot V_i$$

Entonces, el número esperado de personas que llegan en una hora puede ser calculado condicionando sobre el número de aviones que llegan.

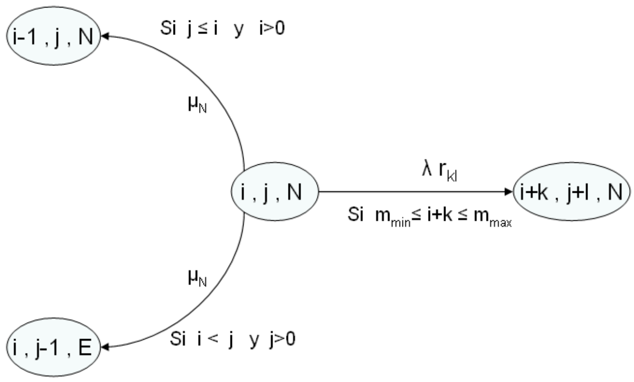
$$\begin{aligned} E[Pasajeros] &= \sum_{j=0}^{\infty} E[X_j] \cdot \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E[N] \cdot \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} \\ &= E[N] \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} \\ &= E[N] \cdot \lambda \end{aligned}$$

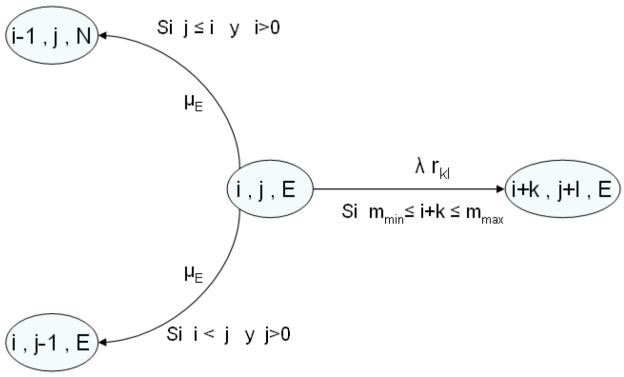
Donde hemos ocupado el hecho que el número de pasajeros que traen los distintos aviones son variables aleatorias iid.

La condición de estado estacionario sigue siendo, la tasa de entrada al sistema debe ser menor que la tasa de atención. Esto es:

$$\frac{\lambda \cdot E[N]}{\mu} < 1$$

5. En esta situación debemos incluir como información de estado que tipo de pasajero esta siendo atendido, nacional o extranjero. Procediendo como se hizo en la parte 2 la cadena de markov toma la siguiente forma (distinguimos a quien se atiende)



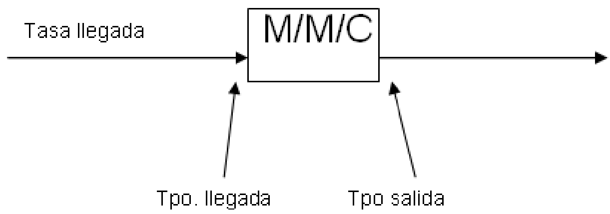

## Problema 4

1. Dado que el peaje una vez que entra en funcionamiento no deja de estar en ese estado nunca, es más cercano a la realidad simular el comportamiento estacionario del sistema. Por lo tanto, las condiciones iniciales del problema no son relevantes. Los únicos datos relevantes son las distribuciones de las llegadas de vehículos al peaje, además de los indicadores necesarios para realizar algún análisis del sistema (como el tiempo de espera en cola, por ejemplo).

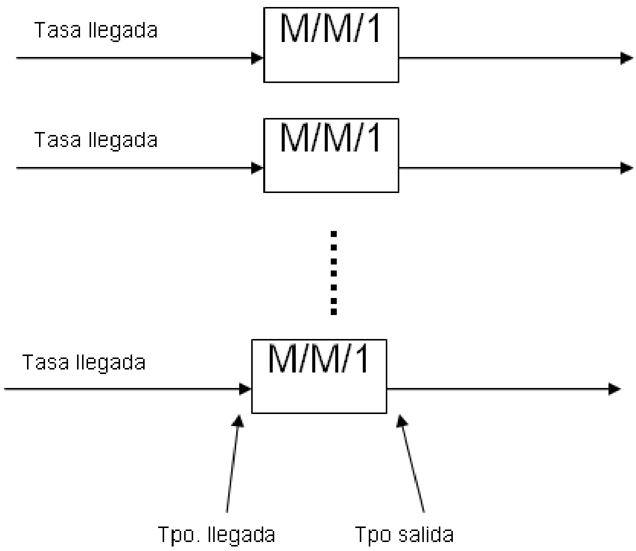
2. - Variables necesarias: Distribuciones de Entrada y Atención.
   - Indicadores: Tiempo de espera en cola, Entidades promedio en espera, entre otros
   - Después de cada llegada y atención, las variables deben ser actualizadas dependiendo de la definición de cada uno.

3. Layout: la idea es que utilicen las variables y parámetros antes definidos y justifiquen la elección de una alternativa de layout. A continuación se muestran distintas alternativas:

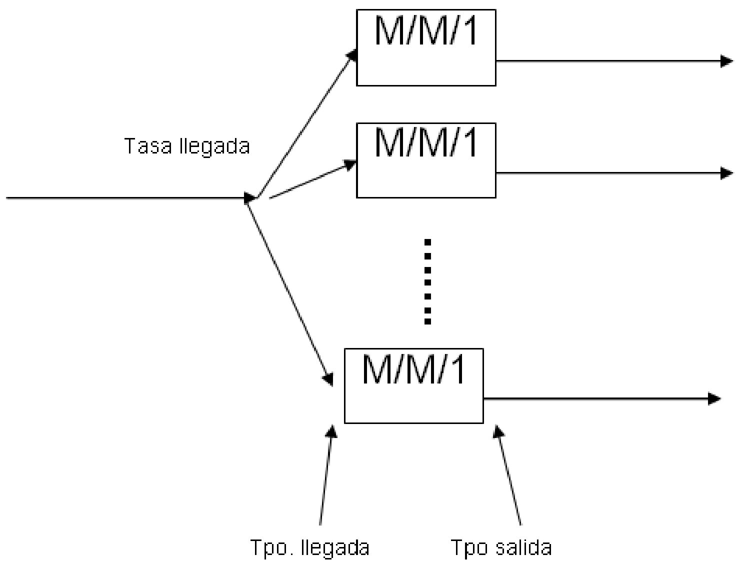
Alternativa 1




Alternativa 2




Alternativa 3



4. Para generar números aleatorios se puede utilizar el método de la transformada inversa. Esto es, dado un número aleatorio $u$ entre 0 y 1, que dicho sea de paso puede ser generado utilizando alguna semilla y el método de los cuadrados centrales, y considerando que la distribución de la que nos interesa generar números tiene una función de distribución, o densidad acumulada, F(x), basta hacer $F^{-1}(u) = x$, luego x se distribuye según la función que interesa.

5. En general nunca conviene diseñar un sistema como éste, entre otros, considerando la demanda máxima. Esto porque el resto de los días, donde no se alcance la demanda máxima, habrá un gran número de cajas sin ser utilizadas y que de todas maneras significan un costo para la empresa que corresponda. Sin embargo, si los costos por mantener capacidad ociosa no son grandes, o pueden realizarse contrataciones de personal sólo para los períodos con demanda alta y considerando además como política de la empresa que el nivel de servicio debe mantener ciertos estándares incluso en los días de alta demanda, sí se puede considerar la demanda alta para realizar el diseño del sistema. La justificación es lo más importante.

`Dudas, consultas y comentarios a`
`dsaure@dii.uchile.cl`