DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Primavera 2003
Prof: P. Rey, A. Schilkrut.
P. Aux: J. Guajardo, P. Hernández, J.A. Muñoz.

PAUTA EXAMEN
5 de Diciembre, 2003

Problema 1

1. *a*) Si denotamos por T al tiempo transcurrido hasta que comienza el concierto, y queremos calcular su valor esperado se tiene que:

$$E(T) = \int_0^\infty (1 - F_T(u)du)$$

Debemos encontrar una expresión para $F_T(u) = P[X = \text{máx}\{X_1, X_2, ..., X_n\} < u]$, donde los $X_i \leftrightsquigarrow \exp(1 \cdot p_i)$ representan el tiempo hasta que se produce la primera llegada de un fanático de la región i

$$\begin{aligned} P[X < u] &= (P[X_1 < u] \cdot P[X_2 < u] ... \cdot P[X_n < u]) \\ &= \prod_{i=1}^N F_{X_i(u)} \\ &= \prod_{i=1}^N (1 - e^{-p_i \cdot u}) \end{aligned}$$

b) Hay que notar que el proceso de llegada de personas es un proceso de Poisson de media 1. Por lo tanto, cada llegada hasta el instante T representa la venta de una entrada.

2. El problema de optimización a resolver está dado por la suma de los costos esperados de inventario y los costos esperados de demanda insatisfecha:

$$\max_{I_0} \; P \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \text{mín}\{I_0, k\} \cdot d_k - H \cdot \sum_{k=1}^{I_0} \cdot d_k - C \cdot \sum_{k=I_0+1}^{\infty} (k - I_0) \cdot d_k$$

don I_0, representa el stock al inicio del mes.

3. Si la empresa cobra un precio p, cada cliente potencial comprará la entrada con probabilidad e^{-p}, entonces, si X es la cantidad de personas que compran entradas, se tiene que:

$$P[X = k] = \binom{N}{k} (e^{-p})^k (1 - e^{-p})^{N-k} \qquad k \leq N$$

Dado que la cantidad de entradas vendidas sigue una binomial se tendrá que el ingreso esperado será la esperanza de la binomial multiplicado por el precio cobrado. Luego derivando e igualando a cero se tiene lo siguiente:

$$E_p[\text{Ingresos}] = N \cdot e^{-p} \cdot p \Rightarrow \frac{\partial E_p[\text{Ingresos}]}{\partial p} = N \cdot e^{-p} - N \cdot e^{-p} \cdot p = 0 \Rightarrow p = 1$$

Por lo que el ingreso óptimo está dado por:

$$E_{p^*}[\text{Ingresos}] = N \cdot e^{-1}$$

Problema 2

Para simplificar la notación, definimos $\alpha_{k,n}$ a la probababilidad de que si llega un avión de Armijo United y hay n personas en el aeropuerto k de ellas quieran abordarlo. Dado que si llega un avión de Armijo United cada uno de los pasajeros de manera independiente tendrá intenciones de tomar el vuelo con probabilidad p, o decidirá esperar a un próximo avión con probabilidad $(1-p)$, se tiene que:

$$\alpha_{k,n} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \forall\ 0 \leq k \leq n$$

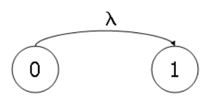
Además es útil definir $\alpha^+_{k,n}$ como sigue:

$$\alpha^+_{k,n} = \sum_{m=k}^{n} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \qquad \forall\ 0 \leq k \leq n$$

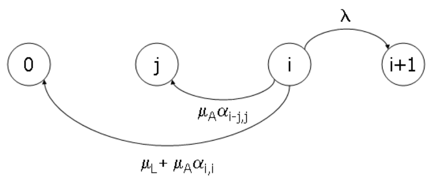
1. A continuación se modela la situación descrita utilizando la notación recién definida.

   Para modelar la cantidad de personas en el terminal aéreo como una cadena de Markov en tiempo continuo, basta con determinar las tasas de transición para los siguientes 3 casos:

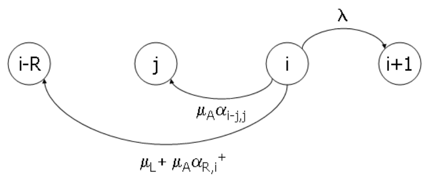
   Caso 1: $i = 0$

   Caso 2: $i \leq R$, $0 \leq j \leq i$.

   Caso 3: $i > R$, $i - R < j \leq i$.

   Para determinar la condición de régimen estacionario debemos fijarnos en un estado genérico $i > R$ Luego la condición de régimen estacionario es que $\exists i^*$ tal que $\forall i > i^*$ se cumpla que:

   $$\lambda \leq \frac{\mu_L + \mu_A \alpha^+_{R,i}}{R} + \sum_{j=i-R+1}^{i-1} \frac{\mu_A \alpha_{i-j,i}}{(i-j)}$$

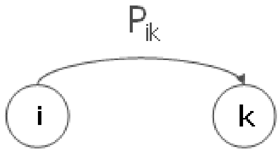
2. La tasa efectiva de entrada es λ.

   Por otro lado la tasa efectiva de salida de pasajeros del aeropuerto está dada por:

$$\overline{\mu} = \sum_{i=1}^{R-1} \pi_i \cdot i \cdot \mu_L + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\text{mín}(R-1,i)} \pi_i \cdot j \cdot (\mu_A \alpha_{j,i}) + \sum_{i=R}^{\infty} \pi_i \cdot R \cdot (\mu_L + \mu_A \alpha^{+}_{R,i})$$

   Dado que existe estado estacionario ambas tasas deben ser iguales.

3. La cadena tiene $T+1$ estados todos comunicados, por lo que existe régimen estacionario. Para determinar las transiciones se debe razonar de la siguiente forma. Si al comienzo de un día, se cuenta con i aviones operando, implica que hay $T-i$ con desperfectos, por lo que puedo formar $\lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor$ lotes de J, por lo tanto tendré $\lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J$ aviones buenos con seguridad al comienzo del próximo día. Tomando esto en cuenta tendremos que:



   Donde:

$$P_{ik} = \begin{cases} 0 & k < \lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J \\ \binom{i}{i+\lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J - k} q^{i+\lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J - k} \cdot (1-q)^{k - \lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J} & k \geq \lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J \end{cases}$$

   En función de $S(i,j)) = \binom{j}{i} q^i (1-q)^{j-i}$ queda de la siguiente forma ($n_i = \lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor$):

$$P_{ik} = \begin{cases} 0 & k < n_i \cdot J \\ S(i + n_i \cdot J - k, i) & k \geq n_i \cdot J \end{cases}$$

Problema 3

1. Falso, ya que la solución de la Programación Dinámica son Políticas de Decisión que en cada etapa indican las decisiones óptimas dependiendo del estado actual del sistema.

2. El sistema discreto puede ser modelado como una cadena de Markov, donde la información almacenada en los estados son tripletas de la siguiente forma: (P_{t-2}, P_{t-1}, P_t).

3. El gráfico mas probable es el segundo ya que, en el primero de ellos el sistema nunca se vacía. Con lo anterior en el gráfico 1 se puede concluir que $\pi_0 = 0$, lo cuál no es posible dado que las probabilidad estacionarias de un sistema M/M/1 se calculan como:

$$\pi_i = \prod_{l=0}^{i-1} \left(\frac{\lambda_l}{\mu_{l+1}} \right) \pi_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i \pi_0 = \rho^i \pi_0$$

4. Esta afirmación es verdadera, dado que el número de personas en un sistema M/M/1 tiene un comportamiento no lineal y asintótico cuando $\rho \rightsquigarrow 1$, luego un aumento en la tasa de atención afecta a lo menos proporcionalmente los indicadores de efectividad del sistema. También se concluye lo mismo con un ejemplo numérico.

5. Hay que imponer que la función de distribución de probabilidades de p_i sea la misma que la distribución de las probabilidades estacionarias. Esto es:

$$p_i = \pi_i \qquad \forall i$$

Dudas, Consultas y/o Errores
Patricio Hernández G.
shernand@ing.uchile.cl