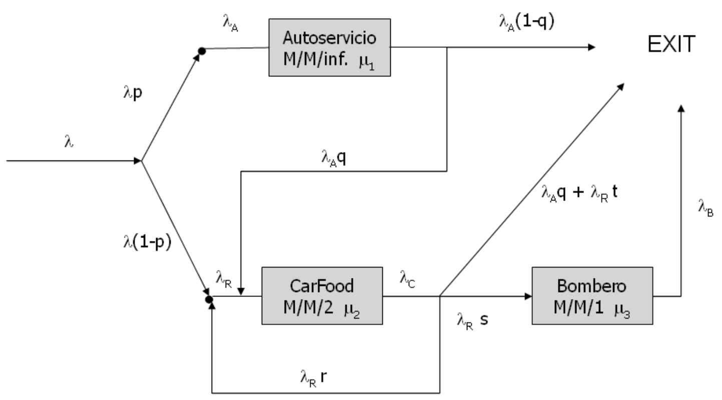
Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Otoño 2004
Profs: P. Rey, D. Sauré A. Schilkrut.
P. Auxs: C. Berner, J. Guajardo, M. Guajardo, P. Hernández.

EXAMEN
Viernes 9 de Julio, 2004

Problema 1

1. El sistema se muestra en la siguiente figura.



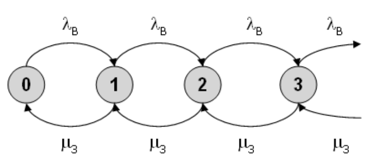
Donde la tasa λ_R representa a los autos que entran al CarFood y pueden entrar al reflujo y es igual a:

$$\lambda_R = \frac{\lambda(1-p)}{1-r}$$

De esta forma se tiene que las tasas efectivas y las condiciones de régimen estacionario son las siguientes:

Sistema	Tasa Efectiva	Valor	CRE
Autoservicio	λ_A	λp	Siempre $\exists$
CarFood	λ_C	$\lambda pq + \frac{\lambda(1-p)}{1-r}$	$\lambda_C < 2\mu_2$
Bomberos	λ_B	$\frac{\lambda(1-p)s}{1-r}$	$\lambda_B < \mu_3$

2. Para determinar la tasa de atencion μ_3 debemos centrarnos en el sistema de atención de la Carga Tradicional de Combustible. A dicho subsistema llegan autos con tasa λ_B, y además sabemos que el **K %** del tiempo el bombero está desocupado, es decir, en el largo plazo se tiene que $\Pi_0 = K$, para la siguiente cadena.



Para esta cadena se tiene que:

$$\Pi_0 = 1 - \frac{\lambda_B}{\mu_3} = K \qquad \Longrightarrow \mu_3 = \frac{\lambda_B}{1-K}$$

3. Los tiempos medios de espera en cada subsistema son:

$$W_A = \frac{1}{\mu_1} \qquad W_C = \frac{2\rho_C}{\mu_2(1-\rho_C^2)} \quad W_B = \frac{\rho_B}{\mu_3(1-\rho_B)}$$

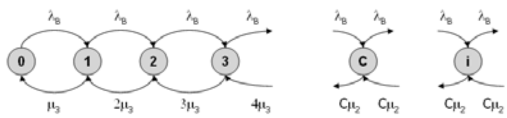
donde $\rho_C = \frac{\lambda_C}{2\mu_2}$ y $\rho_B = \frac{\lambda_B}{\mu_3}$

Luego la esperanza del tiempo que permanece un automóvil dentro de la estación, si ingresó al sistema por el CarFood está dada por:

$$E_C = \sum_{i=1}^{\infty}(iW_C)r^{i-1}t + \sum_{i=1}^{\infty}(iW_C + W_B)r^{i-1}s$$

4. Actualmente la fracción de clientes que llega a cargar combustible con el bombero y debe esperar, es igual a la fracción del tiempo que el bombero está ocupado, es decir, $(1-\Pi_0) = 1-K$.

Al agregar más bomberos el sistema sería de la forma M/M/C, luego debemos determinar la cantidad C tal que [1]: $\sum_{i=C}^{\infty}\Pi_i = \frac{1-K}{2}$. Donde las probabilidades estacionarias son las de la siguiente cadena:



donde:

$$\Pi_i = \frac{\lambda_B^i}{i!\mu_3^i}\Pi_0 \quad \forall i = 0,1,..C-1 \qquad\qquad \Pi_i = \frac{\lambda_B^i}{C!C^{i-C}\mu_3^i}\Pi_0 \quad \forall i = C, C+1,.. \qquad\qquad \sum_{i=0}^{\infty}\Pi_i = 1$$

Problema 2

Lo más importante en esta pregunta es argumentar bien las respuestas.

1. La afirmación del analista es falsa. Lo relevante de la propiedad markoviana es que nos independiza del pasado, y propone que para describir en probabilidad el comportamiento actual sólo basta conocer el estado anterior. En particular, para el caso propuesto en el enunciado se tendrá que:

$$P(X_n = E_i/X_{n-1} = E_j, ..., X_1 = E_k) = P(X_n = E_i/X_{n-1} = E_j) = P_i$$

2. Para el sistema D/D/1 no se cumple que $p_i = q_i$, pues se tendrá que $p_1 = \frac{3}{5}$, $p_0 = \frac{2}{5}$, en tanto que $q_0 = 1$.

Si el proceso de llegada es Poisson, tal como lo hemos visto a lo largo del curso, se tendrá que $p_i = q_i$, en virtud de la propiedad PASTA (Poisson arrivals see times average). Si el proceso de llegada no es poisson, entonces lo anterior no es válido. Por lo tanto, la condición se cumple para los sistemas M/M/1, M/M/C/K, M/G/1; no se cumple para G/M/1.

3. Pepe está equivocado en su aseveración. Dado que la política de decisión es LIFO, es indiferente encontrar el sistema vacío o con mucha gente, ya que al llegar un individuo en cualquiera de las dos situaciones comenzará a ser atendido inmediatamente; si se interrumpe su atención por la ocurrencia de una nueva llegada, ambos tendrán también igual posición en la cola, por lo que ambas situaciones son totalmente equivalentes.

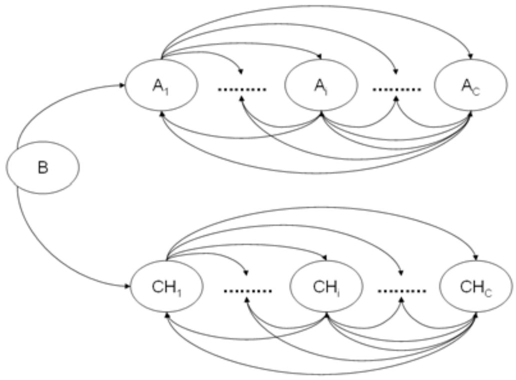
Si el proceso de llegada no es Poisson, el argumento anterior sigue siendo vlido, a no ser que el nuevo proceso de llegada sea dependiente del número de personas que hay en el sistema.

[1] En estricto rigor se debería tomar el cajón superior del mínimo valor de C que satisfaga esta condición

4. La solución obtenida para la condición inicial e_0 es de utilidad para la nueva situación. Recordemos que la solución de un problema de programación dinámica consiste en una política de decisiones que dice qué hacer para cada etapa DADO un cierto estado para esa etapa; lo anterior para todos los estados posibles dada una cierta condición inicial. Entonces, al cambiar la condición inicial, sólo bastará con calcular la solución para el conjunto de estados que no fueron abarcados en la optimización del problema original, pero se aprovecha la solución obtenida para la familia de estados ya calculados para la condición inicial original. Naturalmente, la solución numérica del problema será distinta.

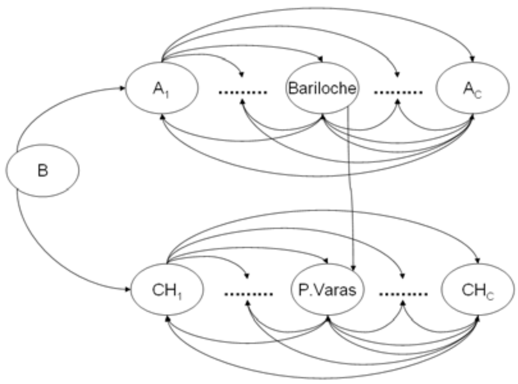
Problema 3

1. *a*) La cadena es la siguiente:



No hay régimen estacionario, pues la cadena no es irreductible (existen dos clases recurrentes)

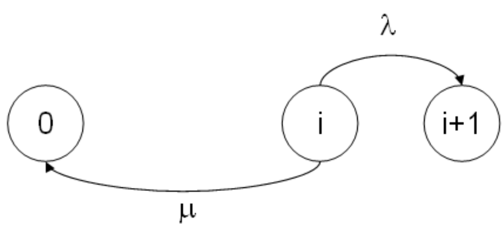
b) En este caso se tendrá:



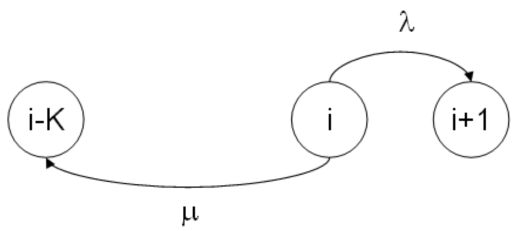
Esta cadena admite régimen estacionario, ya que existe una única clase recurrente compuesta por todos las ciudades de Chile.[2].

2. *a*) La cadena es la siguiente:

- $i \leq K$



- $i > K$



[2]En estricto rigor, para evitar la periodicidad, asumimos que en Chile existen más de 2 ciudades

Las tasas de transición son las siguientes:

- $q_{i,j} = \lambda \quad$ si $j = i + 1, i \geq 0$
- $q_{i,j} = \mu \quad$ si $0 < i \leq K, j = 0$
- $q_{i,j} = \mu \quad$ si $i > K, j = i - K$

Para la condición de régimen estacionario, nos fijamos en aquellos estados mayores que K. Notando que para éstos, cada vez que se lleva a cabo una visita guiada el sistema se vacía en K personas, por lo tanto la condición es:

$$\lambda < \tfrac{\mu}{K}$$

b) Las ecuaciones de balance son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\pi_0 \lambda &= \sum_{j=1}^{K} \pi_j \mu \\
\pi_i \cdot (\mu + \lambda) &= \pi_{i+K} \cdot \mu + \pi_{i-1} \cdot 2\lambda \quad \forall i \geq 1 \\
\sum_i \Pi_i &= 1
\end{aligned}$$

Debemos mostrar que la solución al sistema anterior es de la forma $\pi_i = (1-\rho)\rho^i$, en que ρ satisface la condición del enunciado.

$$\lambda(1-\rho)\rho^0 = \sum_{j=1}^{K}((1-\rho)\rho^j)\mu \Longleftrightarrow \lambda(1-\rho) = (1-\rho)\mu\cdot(\frac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho} - 1) \Longleftrightarrow \mu\rho^{K+1} - (\lambda+\mu)\rho + \lambda = 0$$

Por lo tanto, la primera ecuación es satisfecha si ρ cumple con la condición.

$$(1-\rho)\rho^i \cdot (\mu + \lambda) = \mu(1-\rho)\rho^{i+K} + \lambda(1-\rho)\rho^{i-1} \Longleftrightarrow (\mu + \lambda)\rho = \mu\rho^{K+1} + \lambda$$

Por lo tanto, las ecuaciones del segundo tipo también se cumplen si ρ satisface la condición del enunciado.

$$\sum_{j=0}^{\infty}(1-\rho)\rho^i = (1-\rho)\sum_{j=0}^{\infty}\rho^i = (1-\rho)\frac{1}{1-\rho} = 1$$

Entonces también se cumple la última ecuación.
(En todo lo anterior, supusimos que $|\rho| < 1$)
Luego, las probabilidades estacionarias son $\pi_i = (1-\rho)\rho^i$.

3. Para que el proceso de llegada de **pasajeros** al aeropuerto sea un proceso de Poisson, necesitamos que $p_k > 0$ sólo para $k \in \{0, 1\}$, en tanto que $p_k = 0 \forall k \in \{2, .., N\}$ (si el proceso de llegada de pasajeros es Poisson, no puede ocurrir que lleguen 2 ó más en un mismo instante).

Pauta preparada por:
AUXILIARES IN44A