DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Primavera 2002
Prof: A. Sauré, N. Yanković.
P. Aux: P. Hernández, J.A Muñoz, D. Sauré.

EXAMEN

Viernes 6 de Diciembre de 2002

Problema 1

A un terminal de autobuses llegan pasajeros de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa $\lambda \frac{\text{pasajeros}}{\text{minuto}}$. Estos pasajeros esperan que salga un bus en una fila ordenada por estricto orden de llegada. Los buses salen cada 15 minutos y pueden ser de 2 tipos: Los *rápidos* y los *lentos*. La probabilidad que el siguiente bus sea rápido es p_r, mientras que con probabilidad p_l será lento. Los buses rápido demoran un tiempo fijo de T_r minutos en llegar a su destino, mientras que los buses lentos demoran T_l, con $T_l < T_r$. La capacidad de ambos tipos de buses es K y si hay más de N personas esperando en el terminal no puede entrar nadie más ($N >> K$).

Cada vez que va a salir un bus *rápido* todos los que están esperando intentan subir a él, mientras que en el caso de un bus *lento* existirá una probabilidad d que una persona de la fila quiera irse en este bus, independiente de lo que hagan los demás y de cuanto tiempo lleven esperando.

1. (3,0 ptos) Modele el número de pasajeros que hay en el terminal justo antes de la salida de un bus como una cadena de Markov en tiempo discreto, poniendo atención en los casos interesantes. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias. Escriba explícitamente las probabilidades de transición para cualquier par de estados.
2. (1,0 ptos) Si cuando un pasajero llega al terminal hay menos de K personas, ¿Cuál es el tiempo esperado hasta llegar al destino?.

Suponga ahora que permitimos que los pasajeros piensen y *decidan* si quieren o no viajar en un bus lento.

3. (0,5 ptos) Explique el Trade-Off que enfrenta una persona al decidir si desea o no intentar subir a un bus lento.
4. (1,5 ptos) Explique como sería la estrategia óptima que deberá seguir un pasajero con el fin de minimizar el tiempo esperado que tardará en llegar a su destino.

Problema 2

Una línea aérea ofrece 2 tipos de pasajes: los pasajes *normales* y los pasajes *rebajados*. Los pasajes normales son vendidos el día del vuelo a un precio C_n [\$], mientras que los pasajes rebajados se venderán a un precio C_r [\$] ($C_r < C_n$) anticipadamente sólo a quienes estén inscritos en el programa de viajeros frecuentes. El avión tiene una capacidad de N asientos.

Se sabe que el número de personas que llega a comprar pasajes a precio normal el día del vuelo es una variable aleatoria con distribución conocida (la probabilidad que lleguen k personas a comprar el día del vuelo es q_k, $\forall k \in \mathbb{N}$).

Al programa de viajeros frecuentes se incorporan clientes de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa $\lambda[\frac{\text{clientes}}{\text{día}}]$ y permanecen en el programa un tiempo exponencialmente distribuido de media μ [días]. Sin embargo, la gerencia comercial ha notado que el número de pasajes demandados a precio rebajado por los miembros de este programa queda bien modelado por una variable aleatoria distribuida Poisson de parámetro $\alpha\frac{\text{pasajes}}{\text{vuelo}}$, independiente de cuantos inscritos existan en el programa al momento de poner a la venta un vuelo.

El gerente de la línea aérea ha observado que en muchas ocasiones se vende un gran número de pasajes a precio rebajado y que para el día del vuelo quedan pocos asientos para vender a precio normal, por lo que muchos clientes que llegan ese día (dispuestos a pagar el precio normal) se quedan sin poder viajar. Además, por cada uno de estos clientes, la línea aérea incurre en un costo S [$] por concepto de imagen.

Por todo lo anterior, el gerente ha decidido poner un límite superior de N_R al número de pasajes a precio rebajado que se pueden vender para cada vuelo, con el fin de maximizar los beneficios esperados.

1. (2,0 ptos) Modele el número de clientes socios del programa de viajero frecuente como una cadena de Markov en tiempo continuo. ¿Qué condiciones deben satisfacer los parámetros del problema para que exista estado estacionario?. Encuentre el número esperado de clientes que en el largo plazo estarán en este programa.
2. (1,5 ptos) Condicional en que se vendieron $(N - x)$ pasajes rebajados (de modo que quedan x pasajes para venderse el día del vuelo) ¿Cuál es el valor esperado de los *beneficios* (ingresos - costos) totales?. Llame a este valor $B(x)$.
   HINT: Note que si ya se han vendido $(N - x)$ pasajes rebajados, y Ud. decide no vender más de ese tipo de pasajes, el valor esperado de sus beneficios (condicional en esa información) será $B(x)$.
3. (1,5 ptos) Suponga que ya se han vendido $(N - x)$ pasajes rebajadas, y llega un socio más a pedir un pasaje rebajado. Ud. podría ya sea vendérselo o bien indicarle que se agotaron las pasajes rebajados. Evalúe cuál de esas alternativas es mejor para la compañía.
   HINT: Compare los beneficios esperados de decidir vender el pasaje a precio rebajado v/s esperar al día del vuelo.
4. (1,0 ptos) A partir de los puntos anteriores, ¿Cómo determinaría el N_r^*, el número máximo de pasajes a vender a precio rebajado? Determine el beneficio esperado bajo esta política.

Problema 3

Los alumnos del D.I.I. se aprestan a rendir su examen de final de su curso favorito. El ayudante del ramo recibe los exámenes de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa $\lambda\frac{\text{exámenes}}{\text{hora}}$ y los corrige demorándose un tiempo exponencialmente distribuido con media $1/\mu_1$ [horas] en cada uno. Como resultado de su correción el ayudante puede decidir aprobar al alumno o bien traspasar la evaluación al profesor del ramo, para que él tome la decisión. La probabilidad de que una evaluación cualquiera sea transferida al profesor es p. El Profesor demora un tiempo distribuido exponencialmente de media $1/\mu_2$ [horas] en estudiar una situación cualquiera. Su decisión puede ser la aprobación o reprobación del alumno, y se sabe que reprueba a una fracción R de las evaluaciones que recibe.

En los casos en que se decide reprobar a un alumno, el profesor debe publicar inmediatamente esta situación.

Por otra parte, en el caso que un alumno sea aprobado, ya sea por el ayudante o el profesor, se deben cumplir una serie de procedimientos administrativos (cálculos de promedios y otras cosas varias) los que terminarán con publicación de la situación final y la respectiva nota del examen. Estos trámites son realizados con mucha dedicación por alguno de los 2 auxiliares del ramo demorando un tiempo exponencialmente distribuido con media $1/\mu_3$ [horas] por cada alumno aprobado.

1. (1,5 ptos) Modele el proceso descrito como un sistema de colas. ¿Qué relaciones deben satisfacer λ, μ_1, μ_2, μ_3, p y R para que se alcance régimen estacionario?
2. (1,0 ptos) En promedio, ¿Cuánto tiempo debe esperar un alumno desde que entrega su examen hasta ver publicada su situación final?.
3. (1,5 ptos) ¿Qué fracción de los alumnos que resultan aprobados ha sido por decisión del profesor?. Sólo para los alumnos que son aprobados: ¿Cuánto tiempo pasa, en promedio, desde que se recibe el examen hasta que se publican sus notas y situación final?

Suponga ahora que los tiempos de atención no son exponenciales sino que se distribuyen aleatorios, con distribución de probabilidad $F_1(t)$, $F_2(t)$ y $F_3(t)$, para el ayudante, el profesor y c/u de los auxiliares respectivamente. Además, el ayudante que recibe los exámenes siempre les da prioridad a las mujeres, por lo que si está trabajando en la correción de la prueba de un hombre y llega el examen de una mujer, dejará la corrección hasta donde iba para retomarla después (la probabilidad que un alumno sea hombre es q).

4. (2,0 ptos) Con estas modificaciones ¿Puede modelar proceso descrito como un sistema de colas de Jackson?. Realice en forma esquemática una corrida de simulación que permitiría contestar cuánto tiempo en promedio debe esperar un alumno desde que entrega su examen hasta ver publicada su situación final.

Indicaciones Generales y Fórmulas

- Algunas Distribuciones.
  $X \rightsquigarrow \text{EXP}(\lambda):\quad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\ \forall\, x \geq 0 \quad E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
  $X \rightsquigarrow \text{Poisson}(\lambda):\quad \Pr[X = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad E(X) = \lambda \quad \text{Var}(X) = \lambda$
  $X \rightsquigarrow \text{geométrica}(p):\quad \Pr[X = k] = (1-p)\cdot p^k \quad E(X) = \frac{p}{1-p} \quad \text{Var}(X) = \frac{p}{(1-p)^2}$
- Algunas series.
  $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$ y $\sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}$, si $|a| < 1$.
- Sistemas elementales de espera en estado estacionario.
  $M/M/1$
  $$L = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad \Pi_0 = 1-\rho \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$
  $M/M/2$
  $$L = \frac{2\cdot\rho}{1-\rho^2} \qquad \Pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho} \qquad \rho = \frac{\lambda}{2\cdot\mu}$$