Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: Pablo Rey, Antoine Sauré
Aux : P. Hernández, J. Muñoz, D. Sauré.

EXAMEN IN44A, Jueves 10 de Julio, 2003

Problema 1 (25 %)

1. (1,5 ptos.) Explique analíticamente por qué las cajas de un banco trabajan con una fila única en vez de tener distintas filas para cada una. Para desarrollar su respuesta considere que los bancos funcionan con dos cajas solamente.

2. (1,5 ptos.) Al inicio de un tramo de una autopista llegan autos en instantes aleatorios de tiempo, los cuales después de recorrerlo en toda su extensión lo abandonan tomando otras vías.

   Hasta el momento se ha observado que en promedio una de las pistas pasa desocupada, y que el tiempo promedio que toman los vehículos en recorrer el tramo es razonable.

   En medio de una discusión por la segregación espacial que produce la autopista, una autoridad de la región en que se encuentra ésta ha sugerido la siguiente idea: "eliminar una pista del tramo para generar un bandejon central (área verde)". Según él, de esta manera se liberará la capacidad ociosa sin producir mayores efectos de congestión.

   ¿Ud. como experto en Investigación de Operaciones, estaría de acuerdo con el edil? Justifique su respuesta.

3. (1,5 ptos.) A una línea productiva llegan trabajos con una tasa λ [trabajos/hora]. Actualmente estos se amontonan en una pila siendo realizado primero el trabajo que está arriba del montón, es decir, según una regla de despacho LIFO.

   Preocupados por el tiempo promedio que permanecen los trabajos en el proceso, que incluye la espera y su paso por la línea, dos supervisores discuten sobre la calidad de la regla de despacho utilizada. Sergio dice que conseguirían menores tiempos promedio en el proceso utilizando una regla FIFO. En cambio, Andrés dice que una regla RANDOM, en la cual se escoge al azar el siguiente trabajo que entrará a la línea, es mejor que la otras dos considerando éste indicador.

   ¿Quién tiene la razón? Justifique su respuesta.

4. Considere un letrero luminoso que permanece encendido todo el día y que contiene N ampolletas. Cada ampolleta tiene un tiempo de funcionamiento, independiente de las otras, que se distribuye según una variable aleatoria exponencial de tasa μ_i. Con esta información responda las siguientes preguntas:

   - (0,5 ptos.) ¿Cómo se distribuye el tiempo que transcurre hasta que falla la primera ampolleta (puede ser cualquiera)?
   - (0,5 ptos.) ¿Con qué probabilidad la ampolleta número N será la primera en fallar?
   - (0,5 ptos.) Si tuviese que decidir sobre la forma de mantener funcionando el letrero, ¿cuál de las siguientes alternativas escogería?: (1) Reemplazar las N ampolletas para asegurar un tiempo de funcionamiento mayor, o (2) sólo reemplazar las ampolletas apagadas al momento de la revisión. Justifique su respuesta.

Problema 2 (30 %)

Tras una secuela de fracasos financieros, Armijo Catalán ha decidido dedicarse a la venta de un revolucionario producto de higiene personal. Ocupando sus precarios conocimientos ha realizado un estudio de su demanda, el que ha permitido concluir que para un período de venta k, cualquiera, el número de potenciales compradores se distribuye Poisson con una tasa igual al número de clientes que compró el producto en el período anterior $k-1$. Además en un período k cualquiera, la probabilidad que uno los clientes potenciales, independiende de todo lo demás, compre el producto es e^{-p_k} donde p_k es el precio fijado en el período k. Suponga que Armijo cuenta con una cantidad ilimitada de unidades del producto y que inicialmente (período 1) el número de clientes potenciales se distribuye Poisson con tasa λ[clientes].

1. (1,0 ptos.) Si en el período 2 se vendieron n unidades del producto, calcule la esperanza de los ingresos del período 1 (considere p_1 y p_2 conocidos).
2. (0,5 ptos.) Si en el período 2 se vendieron n unidades del producto, calcule la esperanza de los ingresos del período 3 (considere p_3 conocido).
3. (1,0 ptos.) ¿Cuál es el precio óptimo y el beneficio esperado máximo si se considera un sólo período de venta?
4. (1,5 ptos.) Responda lo anterior considerando 2 períodos de venta.
5. (2,0 ptos.) Ahora se desea resolver el problema para un horizonte de T períodos. Plantee un modelo de programación dinámica que lo ayude a encontrar el precio de venta óptimo al inicio de cada período.

Problema 3 (30 %)

A un aeropuerto internacional llegan vuelos según un Proceso de Poisson de tasa λ [vuelos/hora]. La cantidad de pasajeros que trae cada vuelo puede ser descrita por una variable aleatoria que toma valores enteros entre m_{min} y m_{max} ($m_{min} < m_{max}$). Las variables aleatorias que representan las cantidades de pasajeros en vuelos distintos son independientes e idénticamente distribuidas. Suponga que V_k es la probabilidad de que un vuelo traiga k pasajeros.

Los pasajeros que llegan pueden ser "nacionales", retornando al país, o "extranjeros", que vienen de visita. Un pasajero cualquiera, independiente de todo lo demás, es "nacional" con probabilidad p y "extranjero" con probabilidad $(1-p)$.

1. (0,5 ptos.) Dado que en un vuelo vienen $i+j$ pasajeros, calcule la probabilidad de que i pasajeros sean nacionales y j sean extranjeros. Llame q_{ij} a esta probabilidad.
2. (0,5 ptos.) Calcule la probabilidad de que en un vuelo cualquiera haya exactamente i pasajeros nacionales y j extranjeros. Llame r_{ij} a esta probabilidad.

Una vez en el aeropuerto todos los pasajeros se dirigen directamente a la oficina de migraciones, donde esperan en dos filas separadas: una para pasajeros nacionales y otra para pasajeros extranjeros. Suponga que el tiempo de traslado desde el arrivo del avión hasta la oficina de migraciones es despreciable.

En la oficina de migraciones trabaja un solo empleado, el cual requiere de un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu$ [horas] para atender a un pasajero, independiente de su nacionalidad. Además considere que en caso de existir pasajeros esperando, el siguiente pasajero a ser atendido por el empleado es escogido de acuerdo a las siguientes reglas:

- Si la cantidad de pasajeros esperando en la fila de nacionales es **mayor o igual** a la cantidad de pasajeros esperando en la fila de extranjeros, el próximo pasajero en ser atendido será el primero en la fila de nacionales;
- Si la cantidad de pasajeros esperando en la fila de nacionales es **menor** a la cantidad de pasajeros esperando en la fila de extranjeros, el próximo pasajero en ser atendido será el primero en la fila de extranjeros.

Teniendo en cuenta lo anterior, responda las siguientes preguntas:

3. (2,5 ptos.) Modele el número de personas en las filas como una cadena de Markov en tiempo continuo. Especifique los estados posibles y las tasas de transición.
   Hint: Considere un estado genérico de la cadena y vea a cuáles estados puede haber transiciones.

4. (1,5 ptos.) Calcule la "tasa efectiva" de llegada de pasajeros al aeropuerto. A partir de este valor especifique las condiciones para que el sistema alcance el estado estacionario.

5. (1,0 ptos.) ¿Cómo se debería modificar el modelo si las tasas de atención dependiesen del tipo de pasajero que está siendo atendido? Específicamente, considere que los tiempos de atención puede ser descritos por variables aleatorias de distribución exponencial de media $1/\mu_N$ [horas], para los pasajeros nacionales, y de media $1/\mu_E$ [horas], para los extranjeros.
   Hint: Analice si es necesario incluir algún dato adicional en la definición de los estados y cuáles transiciones cambian.

Problema 4 (15 %)

Considere que Ud. está diseñando una de las plazas de peaje de la nueva Autopista Central. Para esto se le ha pedido definir el número de cajas con las que debería contar el sistema en un día de demanda alta, de manera tal de asegurar que no más del 5 % de los autos espere más de dos minutos. Suponga que se mantiene fija la cantidad de cajas abiertas durante todo el día.

Si se quisiera abordar el problema planteado por medio de un modelo de simulación, responda las siguientes preguntas:

1. (1,0 ptos.) ¿Qué tipo de comportamiento simularía, transiente o estacionario? Son importantes las condiciones iniciales para este problema?

2. (1,0 ptos.) ¿Qué variables sería necesario definir para realizar una corrida de simulación? ¿Cómo calcularía el indicador relevante para este problema? ¿Cómo actualizaría las variables definidas ante los eventos aleatorios?

3. (1,5 ptos.) Construya un layout para el proceso descrito considerando todo lo definido en los puntos anteriores.

4. (1,5 ptos.) ¿Cómo estimaría las distribuciones que siguen las variables definidas? ¿Cómo generaría números aleatorios con las distribuciones encontradas?

5. (1,0 ptos.) ¿Conviene diseñar la plaza de peaje tomado como referencia un día de demanda alta? Justifique su respuesta.

Indicaciones Generales y Fórmulas

- Algunas Distribuciones.
  $X \rightsquigarrow \text{EXP}(\lambda)$: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\ \forall\, x \geq 0$ $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
  $X \rightsquigarrow \text{Poisson}(\lambda)$: $\Pr[X = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ $E(X) = \lambda$ $\text{Var}(X) = \lambda$
  $X \rightsquigarrow \text{geométrica}(p)$: $\Pr[X = k] = (1-p)\cdot p^k$ $E(X) = \frac{p}{1-p}$ $\text{Var}(X) = \frac{p}{(1-p)^2}$

- Algunas series.
  $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$ y $\sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}$, si $|a| < 1$.

- Sistemas elementales de espera en estado estacionario.
  $M/M/1$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad \Pi_0 = 1-\rho \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

  $M/M/2$

$$L = \frac{2\cdot\rho}{1-\rho^2} \qquad \Pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho} \qquad \rho = \frac{\lambda}{2\cdot\mu}$$