EXAMEN

Viernes 5 de Diciembre, 2003

Problema 1

1. Dado el éxito del concierto de despedida de Pepe y los Markovianos, han decidido realizar un nuevo espectáculo final al cuál asistirán fanáticos de las N regiones de Chile. Los asistentes llegan al evento según un proceso de Poisson de tasa 1 [personas/minuto] y la probabilidad de que una persona provenga de la región j ($j = 1...N$) es p_j y es independiente de las llegadas de los fanáticos que han llegado antes. Pepe consciente de lo importante de este concierto, ha decidido no cerrar las puertas del estadio para comenzar el show hasta que haya llegado al menos un fan de cada región.

   a) (1,5 ptos.)¿Cuál es el valor esperado del tiempo T hasta que comienza el recital?
   Indicación: Si X es una variable aleatoria continua que sólo toma valores no negativos, se tiene que $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(u))du$.

   b) (0,5 ptos.) Si la entrada que paga cada fanático es de K[u.m] , fundamente porqué el ingreso esperado por concepto de entradas está dado por $I = K \cdot \mathbb{E}(T)$

2. (2,0 ptos.) La demanda mensual por un producto es una variable aleatoria de distribucuión discreta conocida: se sabe que serán demandadas k unidades con probabilidad q_k. El precio de venta del producto es de P[u.m]. El costo de tener productos sobrantes al final del mes es de H[u.m] por unidad. El costo unitario de demanda insatisfecha es C[u.m]. Plantee el problema que debe resolver para encontrar el stock óptimo al comienzo del mes con tal de maximizar los beneficios esperados.

3. (2,0 ptos.) Una empresa de venta de entradas, sabe que existen N clientes potenciales interesados en ir a un determinado evento. Además se sabe que la probabilidad de compra de cada uno de ellos es e^{-P}, donde P corresponde al precio de la entrada. Encuentre el precio que debe fijar la compañía con tal de maximizar el ingreso esperado. ¿Cuál es el ingreso esperado óptimo?.

Problema 2

Al aeropuerto de Oregon llegan aviones de solo dos líneas aéreas, que realizan una ruta local de alto tráfico: L.A. Airlines y Armijo United. El tiempo entre arribos de los aviones al aeropuerto de Oregon, son variables aleatorias i.i.d. exponenciales de parámetro μ_L y μ_A, respectivamente. Por otro lado la capacidad de todos los aviones de ambas compañías es de $\mathbf{R}$ pasajeros. Los pasajeros que requieren realizar el viaje por esta ruta local, llegan al aeropuerto segun un Proceso de Poisson de tasa λ[pasajeros/hora] y se ubican en una cola única con acceso directo a la loza del aeropuerto. Cada vez que llega un avión, cada uno de pasajeros en la fila de espera deciden si abordará o no dicho avión. Se sabe que si el avion es de L.A. Airlines todos los pasajeros esperando tendrán intenciones de abordarlo. Por otro lado, si es de Armijo United cada uno de los pasajeros de manera independiente tendrá intenciones de tomar el vuelo con probabilidad p, o decidirá esperar a un próximo avión con probabilidad $1 - p$. Los pasajeros que desean viajar en un vuelo determinado subirán al avión respetando el orden de llegada y la capacidad de la aeronave. Por otra parte,los pasajeros que deciden no tomar el vuelo y los que se quedaron abajo por falta de capacidad conservarán su prioridad en la fila remanente. Finalmente suponga que tanto el tiempo que demoran los pasajeros en abordar un avión, como el tiempo de despegue son despreciables y que la sala de espera del aeropuerto cuenta con un espacio MUY grande.

1. (2,0 ptos.) Modele la cantidad de personas en el terminal aéreo como una cadena de Markov en tiempo continuo. Determine las transiciones posibles y las tasas involucradas, para los casos particulares que estime convenientes. ¿Cuál es la condición de existencia de régimen estacionario?

2. (2,0 ptos.) Suponga que se cumple la condición condición de estacionariedad y que usted conoce el vector π de probabilidades estacionarias. Entregue expresiones para la tasa efectiva de entrada y la tasa efectiva de salida de pasajeros del aeropuerto. Sin realizar cálculos adicionales indique cuál es la relación que existe entre ellas.

Dada la fuerte competencia, Armijo le ha encargado a ud. la evaluación de la política de reparaciones de los **T** aviones con que cuenta su aerolínea. Las aeronaves se utilizan durante el día y al caer la noche se guardan para volver a ser utilizados en la mañana siguiente. Sin embargo, existe una probabilidad q que un avión en operación falle durante un día, independiente de cuántos días consecutivos lleve operando. La política de envío de aeronaves a mantención es enviar aviones al taller, al final de cada día sólo en lotes de **J** aviones que necesitan reparación y se envía la mayor cantidad de lotes posible. Todas las aeronaves enviadas al taller serán reparadas al día siguiente de su envío y estarán disponibles en la mañana del día subsiguiente del que fueron enviadas a mantención. Suponga que todos los aviones buenos al comienzo de un día estarán operación durante dicho día.

3. (2,0 ptos.) Modele la cantidad de aviones buenos al inicio de cada día como una cadena de Markov en tiempo discreto. Encuentre expresiones generales para las probabilidades de transición. ¿Cuál es la condición de existencia de régimen estacionario?.

Problema 3

1. (1,2 ptos.) Comente sobre la veracidad la siguiente afirmación:

   > "Una solución de un problema de programación dinámica estocástica indica *exactamente* qué acciones serán elegidas en cada período. Es decir, si A es el conjunto de acciones posibles, y el horizonte de decisión tiene n períodos, una solución es una lista (vector) de n acciones."

2. (1,2 ptos.) Se sabe que el precio de un producto, en un determinado período, es una variable aleatoria que depende del valor de dicho precio en los tres períodos anteriores. Considere la siguiente afirmación:

   > "La evolución de este precio puede ser modelada como una cadena de Markov."

   De ser verdadera, explique cómo lo haría. Si es falsa, justifique por qué.

3. (1,2 ptos.) Considere un sistema de espera $M/M/1$ cuya tasa media de atención es mayor a su tasa media de llegadas y que en $t = 0$ parte vacío. Se observa el comportamiento del sistema para un período suficientemente largo y se grafica el número de entidades en el sistema versus tiempo. ¿Cuál de los gráficos presentados en el anexo le parece más probable obtener? Justifique.

4. (1,2 ptos.) Un banco cuenta con un sistema de atención que puede ser representado por una cola $M/M/1$. Se sabe que actualmente $0,95 \leq \rho < 1$. Un consultor, que estudia este sistema le hace al gerente del banco la siguiente afirmación:

"Si la tasa de atención (μ) aumenta en un 10 %, el número promedio de clientes en el sistema (L) disminuirá en a lo menos un 10 %"

Comente la veracidad de la afirmación del consultor. Justifique

Indicación: Puede apoyarse en un ejemplo numérico o gráfico.

5. (1,2 ptos.) Considere un servicio público que puede ser modelado como un sistema $M/M/c$. Este servicio abre sus puertas al público a las 8:00 horas y cierra a las 14:00 horas todos los días. Se sabe que la probabilidad que estén esperando i personas en el instante de apertura es p_i (para $i = 0, 1, \ldots$). ¿Es posible imponer alguna condición sobre las probabilidades p_i de tal forma que apenas comience la atención se alcance régimen estacionario? Justifique.

Indicaciones Generales y Fórmulas

- Algunas Distribuciones

$$X \rightsquigarrow \text{EXP}(\lambda) : \quad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \ \forall\, x \geq 0\,, \qquad E(X) = \frac{1}{\lambda}\,, \qquad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$X \rightsquigarrow \text{Poisson}(\lambda) : \quad \Pr[X = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\,, \qquad E(X) = \lambda\,, \qquad \text{Var}(X) = \lambda.$$

$$X \rightsquigarrow \text{binomial}(N, p) : \quad \Pr[X = k] = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}\,, \qquad E(X) = N \cdot p.$$

- Algunas colas

Sistemas M/M/1

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}\,, \quad \text{donde } \rho = \frac{\lambda}{\mu}\,.$$

Sistemas M/M/2

$$L = \frac{2\rho}{1-\rho^2}\,, \quad \text{donde } \rho = \frac{\lambda}{2\mu}\,.$$

- Algunas series

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}\,, \text{ si } |a| < 1.$$