Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey, D. Sauré
Aux: C.Berner, M.Guajardo, A.Neely, D.Yung

CTP 5
22 de Junio, 2005

Un laboratorio farmacéutico que fabrica medicamentos para combatir resfríos invernales trabaja según un proceso que intentaremos modelar de acuerdo a teoría de colas.

Los medicamentos son ingresados al laboratorio según un proceso de Poisson de tasa λ[medicamentos/hora]. A la entrada se ubican en una única cola para ser codificados. Se cuenta con 2 máquinas codificadoras que realizan esta tarea en un tiempo distribuido exponencialmente de media $\frac{1}{\mu_1}$[hora].

Una vez que los medicamentos han sido codificados se enfrentan a un primer control de calidad que revisa que las dosis de químicos en cada medicamento sean las correctas. En este control se cuenta con 2 estudiantes en práctica que pueden hacer la revisión de dosis, demorando en esta tarea un tiempo distribuido exponencialmente de media $\frac{1}{\mu_2}$[hora]. Suponga que una fracción p de los medicamentos ingresados al laboratorio realmente presentan dosis erróneas. Independiente de todo lo demás, los estudiantes logran detectar a uno de estos medicamentos alterados con probabilidad r, enviándolo inmediatamente al *Departamento de Dosis*.

Todo medicamento que es enviado al *Departamento de Dosis*, será sometido a un tratamiento químico realizado por el único especialista en dosis del laboratorio, que durante un tiempo ditribuido exponencialmente de media $\frac{1}{\mu_3}$[hora] logra corregir totalmente la composición de los medicamentos alterados. Luego de este tratamiento, los medicamentos están listos para la venta por lo que son enviados directamente a la *Sala de Despacho*.

Por otro lado, todos los medicamentos que pasan el primer control de calidad, deben pasar a un control de confirmación, en que un profesional experto en química de fármacos demora un tiempo exponenciamente distribuido de parámetro μ_4[1/hora] en realizar el chequeo. Del total de medicamentos que revisa, este experto envía una fracción q_1 al *Departamento de Dosis*, mientras que a una fracción q_2 del total, dado que no tiene mucha seguridad acerca de su composición, la ubica de nuevo en la cola de este control de confirmación. El resto de los medicamentos revisados por el experto son aprobados y quedan listos para la venta, por lo que son enviados directamente a la *Sala de Despacho*.

Por último, suponga que la *Sala de Despacho* tiene capacidad ilimitada y que cada medicamento permanecerá en ella durante un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro μ_5[1/hora] (luego del cual es finalmente despachado).

1. (1.5 pts) Modele la situación anteriormente descrita como una red de colas, indicando el modelo que ocupará para cada sistema y los parámetros asociados. Calcule las tasas efectivas de entrada a cada sistema.
2. (0.5 pts) Escriba las condiciones para que exista estado estacionario.
3. (1.2 pts) Asuma conocidas las fórmulas para los **tiempos** esperados de permanencia en los sistemas clásicos vistos en el curso. Sin usar la fórmula de Little (**no puede** ocupar las fórmulas del **número de personas** promedio en esos sistemas), calcule el tiempo promedio que un medicamento pasa en todo el sistema en estado estacionario.
4. (1.0 pts) Sea $k = p \cdot r$. En función de los parámetros del problema, encuentre una condición para k tal que, en promedio, la fracción de medicamentos que pasan por el *Departamento de Dosis* sea menor que el 50 % del total de medicamentos ingresados al laboratorio.

5. (0.8 pts) Suponga que el propietario del laboratorio incurre en un costo de \$I por cada medicamento ingresado, que el experto del Departamento de Dosis cobra un sueldo de \$S por unidad de tiempo, que cada estudiante en el primer control de calidad significa un costo de \$E por unidad de tiempo. El profesional del control de confirmación significa un costo de \$P por unidad de tiempo sólo si está ocupado. Además, todo medicamento que es derivado al Departamento de Dosis significa un costo de \$R (por concepto de compuestos requeridos para su corrección). ¿Cuál es el mínimo valor a cobrar por medicamento listo para la venta para que en promedio el propietario autofinancie la operación del laboratorio? (suponga que todos los parámetros en el enunciado del problema están basados en una misma unidad de tiempo).

En lo que sigue, nos centraremos en una instancia de ocurrencias en el *Departamento de Dosis*:

i	Instante de entrada	Instante de salida
1	t_1	t_3
2	t_2	t_6
3	t_4	t_7
4	t_5	t_8
5	t_9	t_{10}

La tabla anterior indica que el i-ésimo medicamento que llegó a este departamento lo hizo en el instante t_i y lo abandonó en el instante t_{i+1} (por ejemplo, t_2 es el tiempo al que llega el segundo medicamento al departamento y t_6 el tiempo al que sale).

Suponga que $t_1 > 0$, $t_i < t_{i+1} \forall i \in \{1, .., 9\}$ y que el intervalo de tiempo $[0, t_{10}]$ y las 5 llegadas registradas son suficientes como para describir el comportamiento promedio del sistema.

Se pide lo siguiente:

6. (0.2 pts) Grafique el número de medicamentos en el Departamento de Dosis v/s tiempo a partir de los datos proporcionados en la tabla.

7. (0.8 pts) Mediante algunos cálculos y una aproximación apropiada, muestre que la fórmula de Little es satisfecha por la instancia dada.

Indicaciones Generales y Fórmulas

- Algunas series.
  $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$ y $\sum_{k=0}^{\infty} ka^k = \frac{a}{(1-a)^2}$, si $|a| < 1$.
- Sistemas elementales de espera en estado estacionario.
  $M/M/1$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} \qquad \Pi_0 = 1 - \rho \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$M/M/2$

$$W = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{2 \cdot \rho}{1 - \rho^2} \qquad \Pi_0 = \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \qquad \rho = \frac{\lambda}{2 \cdot \mu}$$