Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: P. Rey, D. Sauré, R. Epstein.
Aux : C. Berner, M. Guajardo, A. Neely, D. Yung

Clase Auxiliar 14 de Junio, 2005

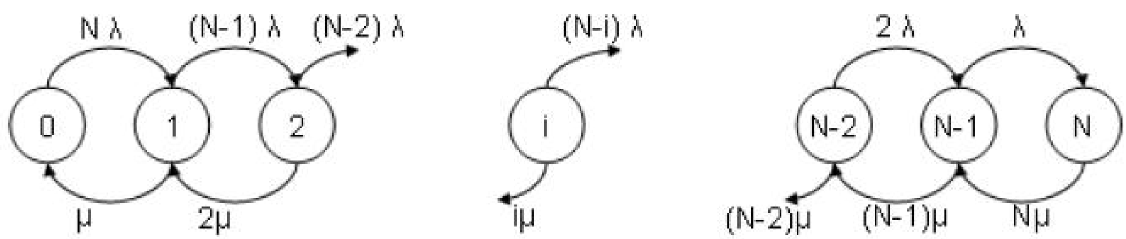
Nacimiento y Muerte

Problema 1

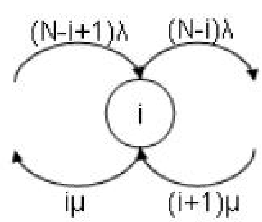
1. Los estados del sistema quedan definidos como:

   (i) : Número de demócratas en el sistema.

   De esta forma la cadena queda de la siguiente forma



Para un estado en particular donde existen i demócratas se tendrá que la transición entre el estado i y el $i+1$ ocurre cuando alguno de los $N-i$ republicanos decide cambiarse de bando, lo que ocurre con tasa $(N-i)\cdot\lambda$. De la misma forma la transición entre el estado i y el $i-1$ ocurre cuando alguno de los i demócratas decide cambiarse de bando, lo que ocurre con tasa $i\cdot\mu$.



Dado que el proceso anterior es de nacimiento y muerte se pueden aplicar las fórmulas para las probabilidades estacionarias.

$$\pi_i = \prod_{k=1}^{i} \left(\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\right) \cdot \pi_0$$

$$\Rightarrow \quad \pi_i = \frac{N\cdot(N-1)\cdot(N-2)...\cdot(N-i+1)\cdot\lambda^i}{i\cdot(i-1)\cdot(i-2)...\cdot 2\cdot 1\cdot\mu^i}\cdot\pi_0$$

$$\Rightarrow \quad \pi_i = \frac{N!\cdot\lambda^i}{(N-i)!\cdot i!\cdot\mu^i}\cdot\pi_0 \;=\; \binom{N}{i}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i\cdot\pi_0$$

donde $\pi_0 = \frac{1}{(1+\frac{\lambda}{\mu})^N}$ se encuentra ocupando el binomio de Newton y que la suma de las probabilidades estacionarias es 1.

2. De esta manera, la probabilidad de que los demócratas ganen las elecciones será igual a encontrarse en algún estado con más demócratas que republicanos, es decir:

$$\sum_{i=\frac{N}{2}+1}^{N} \pi_i \text{ ó } \sum_{i=\frac{N+1}{2}}^{N} \pi_i$$

En caso de que N sea par o impar respectivamente. Notar que en el caso par si el número de votantes demócratas es $\frac{N}{2}$ la elección se empata.

3. si $\lambda = \mu \Rightarrow \pi_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^N$

De esta manera $\pi_k = \binom{N}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{N-k} \rightsquigarrow B(N, \frac{1}{2})$

En el largo plazo, dado que una persona se cambia de partido con probabilidad $\frac{1}{2}$ tener, por ejemplo, 20 personas de N votando por el partido demócrata es equivalente a tirar N veces una moneda y contar 20 sellos.

Por esto la probabilidad de ganar será $\frac{1}{2}$ en el caso de N impar, mientras que si N es par como existe alguna probabilidad de empatar debemos pensar en

$$2 \cdot P(ganar) + P(empatar) = 1$$

donde la probabilidad de empatar viene dada por:

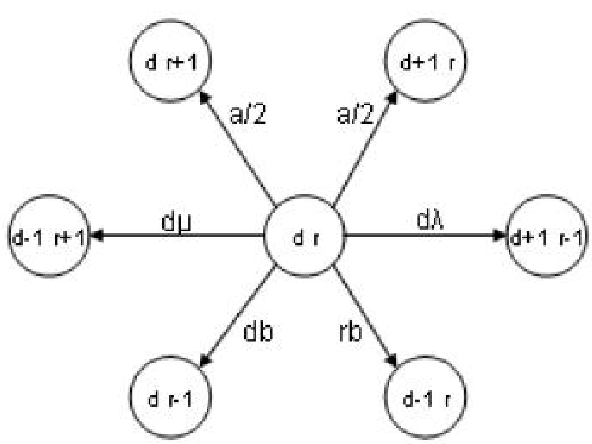
$$P(empatar) = \binom{N}{\frac{N}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

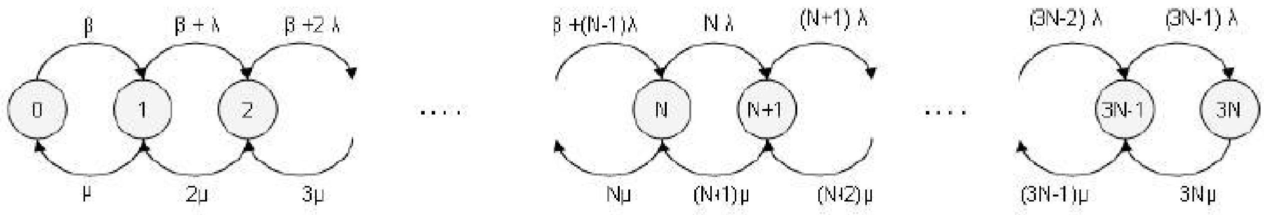
4. Cuando permitimos que el número de personas cambie vía nacimientos y muertes la cadena de la parte anterior ya no sirve puesto que es necesario saber no sólo el número de demócratas sino la cantidad total de votantes.

Una manera de modelar esta situación es utilizando una cadena de Markov continua con pares ordenados en cada nodo, que representen el número de demócratas y el número de republicanos respectivamente (D, R).

De esta manera, la población total será $N = D + R$ y las transiciones serán las que se muestran en el grafo. En estos casos la probabilidad de que los demócratas ganen una elección en el largo plazo será igual a,

$$\sum_{i>j} \pi_{(i,j)}$$





Problema 2

1. De acuerdo al enunciado, la cadena queda de la siguiente forma:

   Respecto a la condición de estacionaridad, estamos frente a una cadena finita, por lo que existirán probabilidades estacionarias (dado que es irreductible)

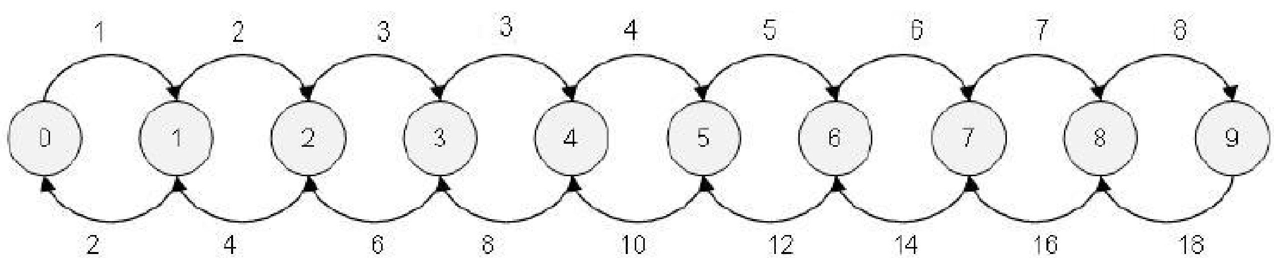
2. Dado que se trata de un proceso de nacimiento y muerte utilizamos las formulas conocidas. Entonces, con un poco de desarrollo vemos que:

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{\prod_{k=0}^{i-1}(\beta+k\lambda)}{i!\mu^i} \cdot \pi_0 & si \quad 0 < i \leq N \\ \frac{\prod_{k=0}^{N-1}(\beta+k\lambda)\cdot\lambda^{i-N}(i-1)!}{i\cdot(N)!\cdot\mu^i} \cdot \pi_0 & \sim \end{cases}$$

   Donde

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{\prod_{k=0}^{i-1}(\beta+k\lambda)}{i!\mu^i} + \sum_{i=N+1}^{3N} \frac{\prod_{k=0}^{N-1}(\beta+k\lambda)\cdot\lambda^{i-N}(i-1)!}{i\cdot(N)!\cdot\mu^i}}$$

3. En este caso la cadena toma la siguiente forma:



   Las ecuaciones de estado estacionario son las siguientes:

$$\pi_1 \quad = \quad \frac{i!}{2i!}\pi_0, i \leq 3$$

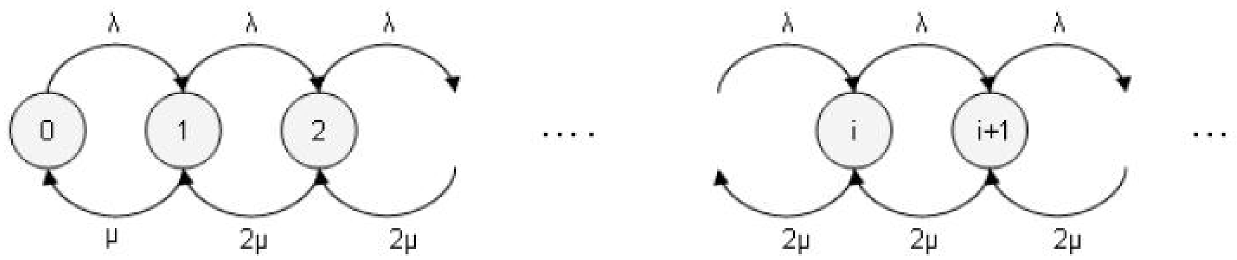
$$\pi_1 \quad = \quad \frac{3!\frac{(i-1)!}{2!}}{2i!}\pi_0, i > 3$$

   Sólo resta calcular π_0 y luego, conocidas las probabilidades estacionarias, vemos que la fracción del tiempo que no pueden ingresar el primer tipo de fanáticos es:

$$\sum_{k=3}^{9} \pi_i$$

Problema 3

Primero debemos notar que el sistema en cuestión es una cola del tipo M/M/2 com la que se muestra a continuación:



1. Como condición de estado estacionario debemos imponer que:

$$\frac{\lambda}{2 \cdot \mu} < 1$$

2. Los resultados para la M/M/2 son conocidos:

$$\pi_i = 2 \cdot \rho^i \cdot \pi_0 \qquad i \neq 0$$

Donde:

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i}$$

$$\pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

con $\rho = \frac{\lambda}{2 \cdot \mu}$.
Por otro lado, del enunciado sabemos que $\pi_0 = 0{,}1$ Por lo tanto igualando términos obtenemos que:

$$\frac{1-\rho}{1+\rho} = 0{,}1 \Rightarrow \lambda \approx 1{,}64$$

3. Si calculamos el número medio de personas en el sistema, tendremos que:

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \cdot k = \frac{\rho}{1-\rho^2}$$

Entonces utilizando Little tendremos que:

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\rho}{(1-\rho) \cdot \lambda}$$

Pero este W es el tiempo promedio en el sistema, entonces tenemos que restarle el tiempo de atención. Entonces el tiempo promedio de espera será:

$$W_{Cola} = W - \frac{1}{\mu}$$

A su vez, el número promedio de llamadas en espera será:

$$L_{Cola} = L - 2 + 1 \cdot \pi_1 + 2 \cdot \pi_0$$

(Este último resultado se puede obtener también notando que $L_{Cola} = \sum_{k=3}^{\infty} \pi_k \cdot (k-2)$)

4. En este caso la cadena toma la siguiente forma:

Claramente aquí no hay que imponer condición de estado estacionario (dado que la tasa de atención aumenta indefinidamente a medida que el sistema se llena, mientras que la tasa de llegada permanece constante)

5. Las ecuaciones de estado estacionario(nacimiento y muerte) son las siguientes:

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0$$

$$\pi_2 = \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^2\pi_0$$

$$\pi_i = (\frac{\lambda}{\mu})^i \prod_{k=3}^{i} \cdot \frac{1}{2(k-2)} \qquad i > 2$$

Con:

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^2 + \sum_{i=3}^{\infty}(\frac{\lambda}{\mu})^i \prod_{k=3}^{i} \cdot \frac{1}{2(k-2)}}$$

Ahora si igualamos la expresión de π_0 al valor dado (0.1) obtendríamos el valor de λ (mismo procedimiento que en la parte anterior).

`Dudas, consultas y comentarios a`

`mguajard@ing.uchile.cl`