Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey, D. Sauré
Aux: C.Berner, M.Guajardo, A.Neely, D.Yung

Clase Auxilliar 11 Mayo de 2005

Repaso Control 2

Problema 1, Control 2 Otoño 2004

1. (1,5 ptos.) Pasajeros llegan a un estación de Metro según un proceso de Poisson de tasa λ[personas/hora]. El tiempo entre los arribos de los trenes es de t [horas] y su capacidad es tal que puede llevar a todos los pasajeros esperando. Si acaba de pasar un tren y la estación está vacía:
   a) Calcule la esperanza de la suma de los tiempos de espera de los pasajeros que subirán al siguiente tren.
   b) ¿Cómo cambia su respuesta de la parte anterior si los trenes llegan a la estación según un Proceso de Poisson de tasa μ[trenes/hora]?
2. (1,5 ptos.) Considere una intersección que tiene I calles que llegan a ella. La llegada de autos provenientes de la calle i sigue un Proceso de Poisson de tasa λ_i. Cada auto que viene de la calle i, independiente de todo el resto, tomará la calle j con una probabilidad P_{ij}. Sea $B_j(t)$ el número de autos que han tomado la calle j desde la intersección hasta el instante t. Suponiendo que el tiempo que tardan los autos en cruzar la intersección una vez que llegan a ella es despreciable, entregue expresiones para $P[B_j(t) = k]$ y la esperanza de $B_j(t)$.
3. (1,5 ptos.) Clientes llegan a un banco como un proceso de Poisson de tasa λ[personas/hora]. Suponga que 2 clientes llegaron durante la primera hora.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos hayan llegado en los primeros 20 minutos?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos haya llegado durante los primeros 20 minutos?
4. (1,5 ptos.) Un nuevo museo está interesado en analizar las visitas de turistas. El museo recibirá a grupos de T turistas compuestos de personas de diferentes nacionalidades, quienes al momento de retirarse deben firmar el libro de visitas. En particular, se estima que cada persona provendrá del país i con probabilidad p_i, $i = 1, \ldots, N$ donde N representa el número total de países. Desde que el museo abra sus puertas para atención al público, ¿Cuál es el valor esperado del número grupos de turistas que visitarán el museo hasta que el libro de visitas tenga al menos una persona de cada país?

Problema 2

Considere un jugador que apuesta sucesivas veces en el mismo juego. En cada jugada existe una probabilidad p de ganar una unidad y una probabilidad $1 - p$ de perder una unidad. Se asume que las jugadas sucesivas son independientes. El jugador comienza con una cantidad de i, $1 < i < N$ y juega hasta que pierde todo o llega a N.

1. Construya una cadena de Markov que describa la fortuna del jugador en cada instante. Incluya las probabilidades de transición.

2. El jugador al llegar a N cambia su estrategia y decide apostar doble o nada, de manera que con probabilidad p su riqueza es $2N$ (y se retira), mientras con probabilidad $1-p$ pierde todo (y su riqueza se reduce a cero). Modele esta nueva situación.

3. Si en la situación de la parte (a), la probabilidad de ganar es $p = 1/2$, ¿De qué depende que nuestro jugador finalmente gane o pierda?. Sin hacer cálculos entregue valores específicos cuando se pueda e interprete sus resultados.

4. Resuelva el problema para el caso general, es decir, encuentre las probabilidades de terminar ganando o perdiendo el juego si se empieza con una cantidad de i, $1 < i < N$. Se juega hasta que pierde todo o llega a N, con $p \neq (1-p)$.

Problema 3, Control 2 Otoño 2003

Considere una tienda que distribuye un único producto, muy exclusivo, a N clientes . Para otorgarles un buen nivel de servicio mantiene unidades de este producto almacenadas, siendo administradas mediante un Sistema de Revisión Periódica Mensual. De esta manera al comenzar cada mes la tienda revisa el nivel de inventario, n, que considera las existencias en la tienda, y pide a su proveedor una cantidad $T-n$ de unidades ($0 \leq n \leq T$), donde T corresponde al nivel de inventario objetivo ($T \leq N$). La cantidad pedida demora exactamente un mes en llegar, es decir, estará disponible al comienzo del siguiente mes (antes de hacer el pedido).

1. (1.0 ptos.) Suponga que, independiente de todo, cada cliente mensualmente puede demandar sólo una unidad del producto, y que lo hace con probabilidad p. ¿Con qué probabilidad la tienda ve una demanda mensual igual a k unidades? Llame a esta probabilidad α_k ($0 \leq k \leq N$).

2. (1.0 ptos.) Si el nivel de inventario al inicio de un mes es de n unidades, ¿en qué estados se podrá encontrar el sistema al inicio del siguiente mes? ¿qué probabilidades tienen asociadas las transiciones posibles? **Indicación:** Considere que la demanda insatisfecha se pierde.

3. (1.0 ptos.) Utilizando las probabilidades calculadas en las partes anteriores, modele el nivel de inventario de la tienda al comienzo de cada mes como una Cadena de Markov. Identifique claramente los estados y las probabilidades de transición. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias.

Suponga ahora que con probabilidad q la cantidad pedida en un mes cualquiera requiere un mes adicional para su llegada a la tienda.

4. (0.5 ptos.) ¿Qué información adicional debe incorporarse a los estados definidos anteriormente para representar el nuevo escenario del sistema como una Cadena de Markov?

5. (1.5 ptos) Para el nuevo escenario, modele el sistema al comienzo de cada mes como una Cadena de Markov. Identifique claramente los estados y las probabilidades de transición. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias.

6. (1.0 ptos.) Considere conocidas las probabilidades estacionarias para la cadena de la parte anterior, y suponga que la estructura del costo fijo de pedido al inicio de cada mes está dada por la siguiente expresión:

$$C(n) = \begin{cases} A & si \quad n \leq T/2 \\ B & si \quad n > T/2 \end{cases}$$

Determine el costo fijo de pedido esperado en el largo plazo.

Problema 4, CTP 5 Otoño 2004

A una Oficina llegan clientes de acuerdo a un proceso Poissoniano no homogéneo, cuya tasa está dada por

$$\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, \; 9 < t < 15$$

El tiempo está medido en horas, y la oficina opera desde las 9 y hasta las 14 horas. Los clientes, sin embargo, llegan entre las 9 y las 15 horas.

1. (1.5 pts) ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo cliente llegue entre las 10 y las 11 hrs ?.
2. (1.5 pts) Si todos los clientes se demoran exactamente a hrs ($a < 1$) dentro de la oficina, determine el número esperado de clientes dentro de la oficina en cualquier instante del día.
3. (1.5 pts) Si por cada cliente que entra a la oficina, ésta obtiene un ingreso de P [\$], y la oficina enfrenta un costo operacional de C [$\$/hora$]. ¿ Qué condición deben cumplir P y C de modo que a la oficina le convenga aumentar su período de atención hasta las 15:00 hrs?.
4. (1.5 pts) Suponga ahora que a su llegada cada cliente es atendido inmediatamente por uno de los innumerables empleados con que cuenta el banco. Los tiempos de servicio se distribuyen según una distribución $G(x)$. Un consultor le dice a ud. que el número de clientes en el sistema en el instante t^* ($9 < t^* < 14$) se distribuye según un proceso de Poisson con media $p \cdot \mu(9, t^*)$.

   Donde:

   $$\mu(9, t^*) = \int_9^{t^*} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \qquad p = \int_9^{t^*} \frac{1 - G(t^* - s)\partial s}{t^* - 9}$$

   ¿Tiene razón el consultor?. Justifique.