Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey, D. Sauré
Aux: C.Berner, M.Guajardo, A.Neely, D.Yung

Solución Clase Auxilliar 11 Mayo de 2005

Repaso Control 2

Problema 1

1. *a*) Sea t_i el instante de la llegada del i-ésimo pasajero antes de la llegada del siguiente tren. Luego la esperanza pedida corresponde a: $E[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-t_i)]$

   Dado que esta esperanza depende de la variable aleatoria $N(t)$ que representa la cantidad de personas que llegan hasta el instante t, se debe condicionar con respecto a esta variable y luego descondicionar. Luego se tiene que:

$$\begin{aligned}
E[\sum_{i}^{N(t)}(t-t_i)] &= \sum_{k=0}^{\infty} E[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-t_i)/N(t)=n]\cdot P[N(t)=n] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left[E[\sum_{i=1}^{N(t)} t/N(t)=n] - E[\sum_{i=1}^{N(t)} t_i/N(t)=n]\right]\cdot P[N(t)=n] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} E[t/N(t)=n] - \sum_{i=1}^{N(t)} E[t_i/N(t)=n]\right]\cdot P[N(t)=n]
\end{aligned}$$

   En la expresión anterior t es una constante por lo que $E[t]=t$. Por otro lado los tiempos t_i se distribuyen uniformes en el intervalo $[0,t]$ cuya esperanza es $E[t_i]=\frac{t}{2}$. Finalmente el término $P[N(t)=n]$ corresponde a la definición de un proceso de Poisson.

$$E[\sum_{i}^{N(t)}(t-t_i)] = \sum_{k=0}^{\infty}\left[nt-\frac{nt}{2}\right]\cdot\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \frac{t}{2}\sum_{k=0}^{\infty} n\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \frac{\lambda t^2}{2}$$

   b) En la parte 1 se calculó la esperanza pedida dado un tiempo entre trenes conocido igual a t. Dado que los trenes llegan a la estación según un Proceso de Poisson de tasa μ[trenes/hora], el tiempo entre llegadas sigue una distribución exponencial de parámetro μ. Luego descondicionando el resultados de la parte anterior, se tiene que la esperanza pedida es:

$$\int_0^{\infty}\frac{\lambda t^2}{2}\mu e^{-\mu t}dt$$

2. Sea $N_{ij}(t)$ el número de autos que vienen de la calle i y toman la calle j, hasta el instante t. Por la propiedad de división de Poisson $N_{ij}(t)$ es también un Proceso de Poisson con tasa $\lambda_i P_{ij}$ y todos los $N_{ij}(t)$ son independientes. Luego, se tiene que:

$$B_j(t) = \sum_i N_{ij}(t)$$

   Por lo propiedad de composición de Poisson la variable $B_j(t)$ es Proceso de Poisson con tasa $\sum_i \lambda_i P_{ij}$:

$$P[B_j(t) = k] = \frac{(\sum_i \lambda_i P_{ij} t)^k e^{-\sum_i \lambda_i P_{ij} t}}{k!} \qquad\qquad E[B_j(t)] = \sum_i \lambda_i P_{ij} t$$

3. Sea $N(t)$ la cantidad de clientes que han llegado al banco hasta el instante t. Dado que se registraron 2 llegadas en un hora de operación, el instante de cada una de esas llegadas se distribuye Uniforme en el intervalo de una hora. Luego:

   a) $P[N(\frac{1}{3}) = 2/N(1) = 2] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

   b) $2 \cdot P[N(\frac{1}{3}) = 2/N(1) = 2] + P[N(\frac{1}{3}) = 1/N(1) = 2] = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$

4. Podemos definir un Proceso de Poisson de tasa 1 que corresponde a la llegada de cada grupo de turistas. Dado que la cantidad de personas de cada grupo es constante e igual a T, el proceso de llegada de turistas es un proceso de Poisson de tasa T. Si definimos L como el número de turistas necesarios para tener al menos uno de cada nacionalidad y queremos calcular su valor esperado se tiene que:

$$E(L) = \int_0^\infty (1 - F_L(u))du$$

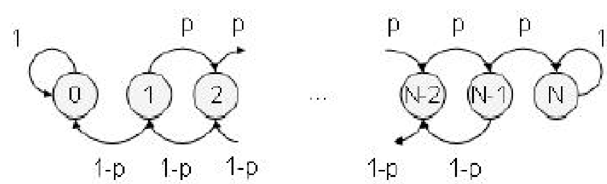
   Debemos encontrar una expresión para $F_L(u) = P[X = \text{máx}\{X_1, X_2, ..., X_N\} < u]$, donde los $X_i \rightsquigarrow \exp(T \cdot p_i)$ representan el tiempo hasta que llega la primera persona de la nacionalidad i

$$\begin{aligned} P[X < u] &= (P[X_1 < u] \cdot P[X_2 < u] ... \cdot P[X_N < u]) \\ &= \prod_{i=1}^N F_{X_i(u)} \\ &= \prod_{i=1}^N (1 - e^{-Tp_i \cdot u}) \end{aligned}$$

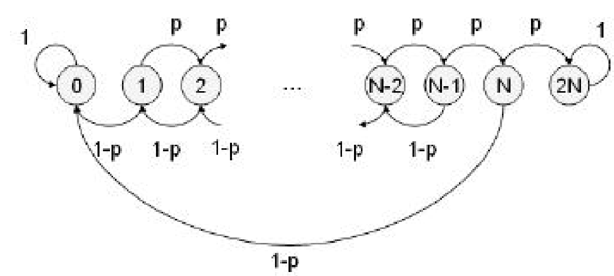
   Dado que la pregunta es por el valor esperado del número grupos de turistas que visitarán el museo hasta que el libro de visitas tenga al menos una persona de cada país y en cada grupo vienen T personas se tiene que $E[G] = \frac{E[L]}{T}$.

Problema 2

1. La cadena es la siguiente:



2. La cadena es la siguiente:



3. Sea:

$$f_i = P[\text{Ganar dado que parto con i unidades}]$$

Inmediatamente vemos que $f_0 = 0$ y que $f_N = 1$. De la misma forma vemos (condicionando en el resultado de la primera apuesta) que:

$$f_i = \frac{1}{2} f_{i+1} + \frac{1}{2} f_{i-1} \qquad \forall 0 < i < N$$

lo que implica que:

$$f_{i+1} - f_i = f_i - f_{i-1} \qquad \forall 0 < i < N$$

La primera ecuación nos dice que:

$$f_2 - f_1 = f_1$$

Utilizando esto vemos que:

$$f_i - f_{i-1} = f_1$$

Ahora si sumamos las $N-1$ primeras ecuaciones tendremos que (utilizando la suma telescópica):

$$f_N - f_1 = (N-1) \cdot f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{N}$$

De la misma forma si sumamos las $i-1$ primeras restricciones veremos que:

$$f_i = i \cdot f_1 = \frac{i}{N}$$

4. Para el caso general procederemos exactamente como lo hicimos para el caso particular:

$$f_i = p \cdot f_{i+1} + (1-p) \cdot f_{i-1} \qquad \forall 0 < i < N$$

lo que implica que:

$$f_{i+1} - f_i = \rho(f_i - f_{i-1}) \qquad \forall 0 < i < N$$

Donde $\rho = \frac{1-p}{p}$ La primera ecuación nos dice que:

$$f_2 - f_1 = \rho f_1$$

Utilizando esto vemos que:

$$f_i - f_{i-1} = \rho^{i-1} f_1$$

Ahora si sumamos las $N-1$ primeras ecuaciones tendremos que (utilizando la suma telescópica):

$$f_N - f_1 = (\sum_{i=1}^{N-1} \rho^i) \cdot f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N-1} \rho^i} = \frac{1-\rho}{1-\rho^N}$$

De la misma forma si sumamos las $i-1$ primeras restricciones veremos que:

$$f_i = (\sum_{k=0}^{N-1} \rho^k) \cdot f_1 = \frac{1-\rho^i}{1-\rho^N}$$

Problema 3

1. Como cada cliente puede demandar sólo una unidad del producto y lo hace con probabilidad p, la demanda mensual puede ser descrita con una distribución Binomial(N,p). Por lo tanto:

$$P[\text{Demanda} = k] = \alpha_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \quad \forall k \in \{1, ..., N\}$$

2. Si el nivel de inventario al inicio de un mes es de n unidades la tienda pide $T - n$ unidades, las que llegaran al inicio del siguiente mes. No obstante, durante el mes el nivel n se ve reducido por la demanda que observa la tienda. De esta manera, si la demanda en el mes es de k unidades, al inicio del siguiente mes el nivel de inventario será $\max\{n-k, 0\} + (T-n)$ unidades. Notamos que a lo más puedo vender la cantidad que está en inventario (no existen ventas pendientes).

   Sea P_{ij} La probabilidad de comenzar un mes con j unidades si al comienzo del mes anterior tenia i unidades en inventario. Entonces $\forall i,\, j \in \{0, ..., T\}$

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & si \quad j < T - i \\ \alpha_{i+} = \sum_{k=i}^{N} \alpha_k & si \quad j = T - i \\ \alpha_{T-j} & si \quad j > T - i \end{cases}$$

3. Para identificar la cadena de Markov simplemente necesitamos especificar cuales son los estados de la misma e identificar la matriz de transición. Claramente los estados son:

$$X_i = \text{Inventario al comienzo del mes es de i unidades} \qquad i \in \{0, ..., T\}$$

   Es decir T+1 estados. Las componentes de la matriz de trancisión son las calculadas en el punto anterior.

   Otra forma de especificar la cadena era bosquejar el grafo asociado. Sin embargo para que dicho grafo se encuentre completamente correcto debe incluir una transición genérica entre los estados i y j.

   Esta Cadena de Markov es finita y está definida por una única clase recurrente aperiódica (ergódica e irreductible). Para ver esto notamos que desde el estado x_T podemos acceder a cualquier otro estado y que desde cada estado puedo acceder a x_T (entonces existe solo una clase). Vemos que es aperíodico puesto que la transición desde x_T a x_T tiene probabilidad no nula. Dados estos argumentos podemos asegurar la existencia de probabilidades estacionarias.

4. Debemos incluir información acerca si existen pedidos que no llegaron al comienzo de la semana en cuestión. Más aun debemos incluir cuantos productos no llegaron debido a un retraso y que por lo tanto se encontraran con seguridad disponibles al comienzo de la próxima semana.

5. Para identificar la cadena de Markov debemos especificar los estados de la misma e identificar la matriz de transición asociada. Los estados son:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= \text{i unidades al comienzo del mes en bodega y j unidades} \qquad \forall i,j \in \{\mathbb{N}^2 | j + i \leq T\} \\ &\quad\ \text{llegaran con seguridad al comienzo del próximo mes} \end{aligned}$$

   En este caso los elementos de la matriz de transición toman la siguiente forma $(i,j,l,k \in \mathbb{N} \quad | i + j \leq T \wedge l + k \leq T)$

$$P_{(i,j)(k,l)} = \begin{cases} 0 & si \quad (k < T - i \,\wedge\, l = 0) \vee (k < j \,\wedge\, l = T - i - j) \\ & \quad\ \vee (l \neq T - i - j \,\wedge\, l \neq 0) \\ q \cdot \alpha_{i+} = & si \quad k = j \,\wedge\, l = T - i - j \\ (1-q) \cdot \alpha_{i+} = & si \quad k = T - i \,\wedge\, l = 0 \\ q \cdot \alpha_{i+j-k} & si \quad k < j \,\wedge\, l = T - i - j \\ (1-q) \cdot \alpha_{T-k} & si \quad k < T - i \,\wedge\, l = 0 \end{cases}$$

La justificación acerca de la existencia de probabilidades estacionarias es análoga a la de la parte 3.

6. La esperanza del costo fijo simplemente es (supongo que pago el costo cuando ordeno):

$$E[Costo] = B \cdot \left[\sum_{i,j | i+j < \frac{T}{2}} \pi_{i,j} \right] + A \cdot \left[\sum_{i,j | i+j \geq \frac{T}{2}} \pi_{i,j} \right]$$

Problema 4

Para este problema:

$$\begin{aligned} u(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt \\ &= 2\sqrt{t}|_{t_1}^{t_2} \\ &= 2\sqrt{t_2} - 2\sqrt{t_1} \qquad (9 \leq t_1 \leq t_2 \leq 15) \end{aligned}$$

1. La probabilidad pedida queda como sigue:

$$\begin{aligned} P(\text{segundo cliente entre 10 y 11}) &= P(N(9,10) = 0 \wedge N(10,11) \geq 2) + P(N(9,10) = 1 \wedge N(10,11) \geq 1) \\ &= e^{-u(9,10)} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-u(10,11)}(u(10,11))^k}{k!} + \\ &\quad e^{-u(9,10)} u(9,10) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-u(10,11)}(u(10,11))^k}{k!} \end{aligned}$$

2. Los clientes que están en el banco en t son los que han llegado entre $(t-a)$ y t. Así:

$$\begin{aligned} E(N(t-a;t)) &= u(t-a;t) \\ &= 2[\sqrt{t} - \sqrt{t-a}] \end{aligned}$$

3. Se debe cumplir que $E(\text{Ingreso entre 14 y 15 hrs}) > C$. La condición queda como sigue:

$$P \cdot \mu(14,15) > C$$
$$P \cdot 2[\sqrt{15} - \sqrt{14}] > C$$

4. El consultor está equivocado porque el supuesto que hay para formular la probabilidad p como:

$$p = \int_9^{t^*} \frac{1 - G(t^* - s)\partial s}{t^* - 9}$$

es que el instante s de la llegada del cliente es uniforme en el intervalo, pero esta propiedad se pierde para el caso de tasa de llegada no-homogénea.

Dudas y/o errores:
Mario Guajardo
mguajard@ing.uchile.cl