Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

Problemas de Control a‘nos anteriores

1. **Problema 3, Control 2 Primavera 2004**

Un ingeniero que trabaja en la mesa de dinero de la Bolsa de Santiago se enfrenta a la siguiente situación. Estudiando el comportamiento del precio de las acciones de la empresa X ha descubierto que diariamente esta acción puede aumentar su valor en una unidad, lo que ocurre con probabilidad p, disminuir en una unidad, con probabilidad q, o mantenerse ,con probabilidad r ($r+p+q=1$). Además cuando el precio de la acción llega al nivel de \$$L$ la probabilidad de bajar es 0 y la probabilidad de mantenerse es $r+q$. De la misma forma, cuando el precio de la acción llega al nivel de \$$U$ la probabilidad de subir es 0 y la probabilidad de mantenerse es $r+p$.

Gracias a esta información privilegiada el ingeniero planea construir una estrategia de inversiones que le permita ganar dinero rápidamente. Suponga que el ingeniero es libre de comprar o vender acciones a cualquier precio y que inicialmente el precio de la acción es \$$i$ ($L < i < U$).

a) (2.0 ptos) Modele el precio diario de la acción de la empresa X como una cadena de Markov en tiempo discreto. Justifique la existencia de una ley de probabilidades estacionaria. Encuentre una expresión para dichas probabilidades (considere $q \neq p$).

b) (1.5 ptos) Suponiendo una fortuna inicial de \$$M$, formule el problema de decisión que enfrenta el ingeniero si desea maximizar sus utilidades cuando quedan T días para su jubilación (día a partir del cual no podrá seguir tranzando en la bolsa).

Dado que el ingeniero es aún muy joven, suponga que el número de días que quedan para su jubilación es infinito. Además suponga que la estrategia del ingeniero es comprar cuando el precio es w y vender cuando el precio es y.

a) (0.0 ptos)¿Qué valor debería ser mayor, w o y?

b) (1.5 ptos) Modifique la cadena de forma de incluir información acerca de la posesión de acciones.

c) (0.5 ptos) Cual es la rentabilidad diária esperada en el largo plazo?(Considere conocida la ley de probabilidades estacionarias)

d) (0.5 ptos) Explique como encontraría (que criterios usaría y como procedería) los valores de w e y "óptimos".

<u>Solución:</u>

a) La cadena se muestra en la siguiente figura.

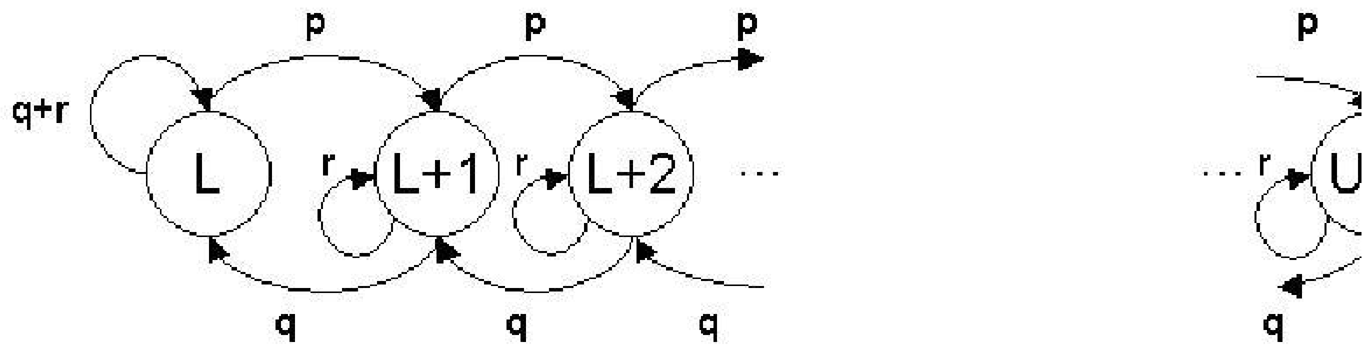
Existirá una ley estacionaria debido a que todos sus estados están comunicados entre sí (una sola clase), la cadena es finita (la clase es recurrente) y existen estados que pueden ciclar sobre si mismos (la clase es apériodica), es decir, la cadena es ergódica.

Considerando $q \neq p$ vemos que la ley de prob. estacionarias debe cumplir con lo siguiente (dado que es la única ley estable).

$$\pi_L \cdot p = \pi_{L+1} \cdot q$$

$$\pi_U \cdot q = \pi_{U-1} \cdot p$$

$$\pi_i \cdot (p+q) = \pi_{i-1} \cdot p + \pi_{i+1} \cdot q \qquad \forall\, i \in \{L+1, , U-1\}$$



Sea $\rho = \frac{p}{q}$. Con un poco de algebra vemos que:

$$\pi_L \cdot \rho = \pi_{L+1}$$
$$\pi_L \cdot \rho^2 = \pi_{L+2}$$
$$\vdots$$
$$\pi_L \cdot \rho^{i-L} = \pi_i$$
$$\vdots$$
$$\pi_L \cdot \rho^{U-L} = \pi_U$$

Así podemos determinar el valor de π_L, puesto que estos números corresponden a una ley de probabilidades.

$$\pi_L = \left[\sum_{i=L}^{U} \rho^{i-L}\right]^{-1} = \left[\sum_{i=0}^{L-U} \rho^{i}\right]^{-1} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{U-L+1}}$$

Entonces:

$$\pi_i = \rho^{i-L} \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{U-L+1}}$$

b) Debemos formular un problema de programación dinámica que nos entregue la estrategia óptima de inversion en acciones. La información relevante para la variable de estado será el precio de la acción, el dinero acumulado. La variable de decisión será vender o no en el caso de poseer el dinero como acciones y comprar o no en el caso en que no se tenga el dinero en forma de acciones, es decir, si el dinero pasará al próximo período en forma de acciones o no.

El modelo es el siguiente:

- Periodos: Cada uno de los días $(1,,T)$
- Estado:

$$P_t = \text{Precio de la acción en el día } t.$$
$$M_t = \text{Cantidad de dinero que se posee en el periodo } t.$$

- Decisiones:

$$E_t = \begin{cases} 1 & \text{El dinero estará en acciones} \\ 0 & \text{El dinero no estará en acciones} \end{cases}$$

- Recurrencia:

$$\begin{aligned} V^*(P_t, M_t) &= \max\{V(P_t, M_t, E_t = 1), V(p_t, M_t, E_t = 0)\} \\ &= \max\{E_{P_{t+1}}[V^*(P_{t+1}, \frac{P_{t+1}}{P_t} \cdot M_t)], E_{P_{t+1}}[V^*(P_{t+1}, M_t)]\} \end{aligned}$$

- Condiciones de borde.

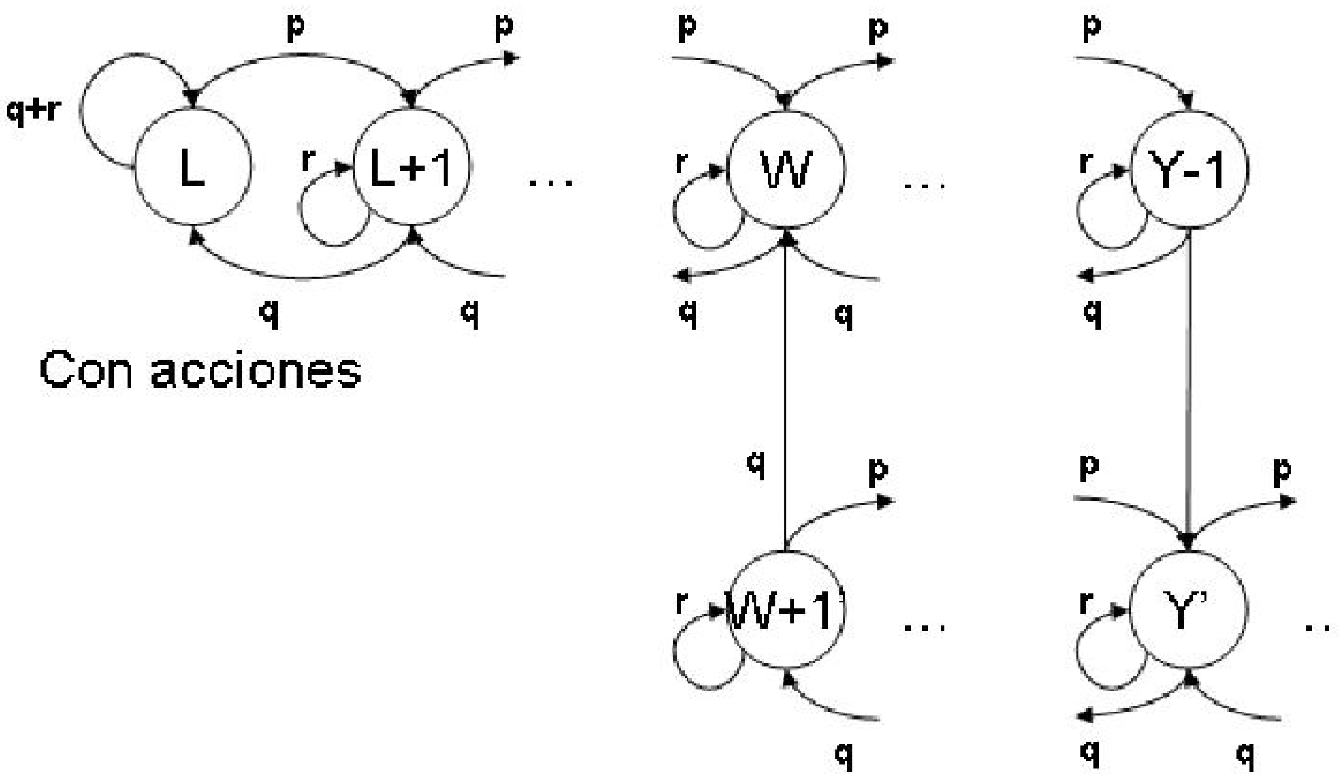
$$V^*_{T+1}(P_{T+1}, M_{T+1}) = M_{T+1}$$

$$M_1 = M$$

$$P_1 = i$$

c) (0.0 ptos) La idea es comprar barato y vender caro. Entonces w debería ser menor que y.

d) (1.5 ptos) La cadena modificada se muestra a continuación.



e) (0.5 ptos) La rentabilidad de largo plazo se puede calcular a partir de las probabilidades estacionarias de la cadena de la parte anterior. Claramente en la cadena donde no tengo acciones la rentabilidad es 0. En estados donde si tengo acciones, si el precio de la acción es i, entonces la rentabilidad esperada en ese estado es $r_i = \frac{(i-1)\cdot q\cdot + i\cdot r + (i+1)\cdot p}{i}$. El estado L representa una excepción, su rentabilidad es $r_L = \frac{L\cdot(r+q)+(L+1)\cdot p}{L}$. Así, la rentabilidad esperada de largo plazo es:

$$R = \sum_{i=L}^{W-1} r_i \cdot \pi_i$$

f) (0.5 ptos) Dado que las ganancias estan siempre aumentando, en el largo plazo la ganancia acumulada debiese divergir para toda política de inversiones razonable ($w < y$). Por esto lo lógico es comparar rentabilidades diarias de largo plazo más que ganancias acumuladas (ojo que comparar ganancias díarias de largo plazo tampoco tiene sentido puesto que la ganancia díaria debería ser proporcional al beneficio acumulado y por lo tanto también diverge).

Como encontrarlo... en la parte anterior se calculo la rentabilidad díaria para una política en particular. Los alumnos debierán basarse en ese resultado para idear un método. Ej: Si se pueden determinar las prob. estacionarias en función de w e y entonces se puede expresar la rentabilidad díaria de largo plazo como función de w e y y por lo tanto tan solo se debe maximizar esa funcón dentro de los valores coherentes para w e y.

3. **Problema 1, Control 2 Primavera 2002**

En un laboratorio existe un sofisticado equipo electrónico con 2 componentes, las que llamaremos A y B, las que pueden estar *encendidas* (ON) o *apagadas* (OFF). Para que este equipo funcione correctamente es necesario que **una y sólo una** de las componentes se encuentre encendida (si se encienden ambas se produce un alza de voltaje que destruye el equipo, mientras que si ambas están apagadas el sistema suspende sus actividades).

El comportamiento de *encendido* y *apagado* es aleatorio e independiente para ambas componentes, pudiendo cambiar al comienzo de cada día. Estos, sólo han podido determinar las probabilidades de transición entre estos estados para ambas componentes, los que se muestran a continuación:

Componente A

	ON	OFF
ON	0.4	0.6
OFF	0.6	0.4

Componente B

	ON	OFF
ON	0.3	0.7
OFF	0.7	0.3

a) (2,0 ptos) Modele el estado del equipo como una Cadena de Markov de tiempo discreto. Determine si existen probabilidades de estado estacionario y escriba la matriz de transición de un período.

b) (1,0 ptos) Si la componente A está actualmente en ON y la componente B en OFF, ¿Cuál será la duración esperada del equipo antes de fallar?.

Suponga ahora que cada vez que el equipo deja de funcionar porque ambas componentes se encuentran encendidas se incurre en un costo de $\$C$ porque hay que realizar reparaciones mayores producto del alza de voltaje. Estas reparaciones demoran exactamente dos días (el día en que falla y uno adicional), luego de los cuales la máquina comenzará a operar con la componente A en ON y la B en OFF.

Sin embargo, si el equipo ha dejado de funcionar porque ambas componentes están en OFF el encargado del laboratorio al inicio del día siguiente interviene y pone en ON a la componente A, incurriendo en un costo $\$k$ con $k < C$ asociados a no tener el equipo funcionando 1 día.

En esta situación conteste las siguientes preguntas:

a) (1,5 ptos) Modele la nueva situación como una cadena de Markov en tiempo discreto. Determine las probabilidades de transición de un período.

b) (1,5 ptos) ¿Cuál es la fracción del tiempo en el largo plazo que la máquina no estará operativa?. ¿Cuál es el costo promedio diario en el largo plazo de mantener el equipo operando?.

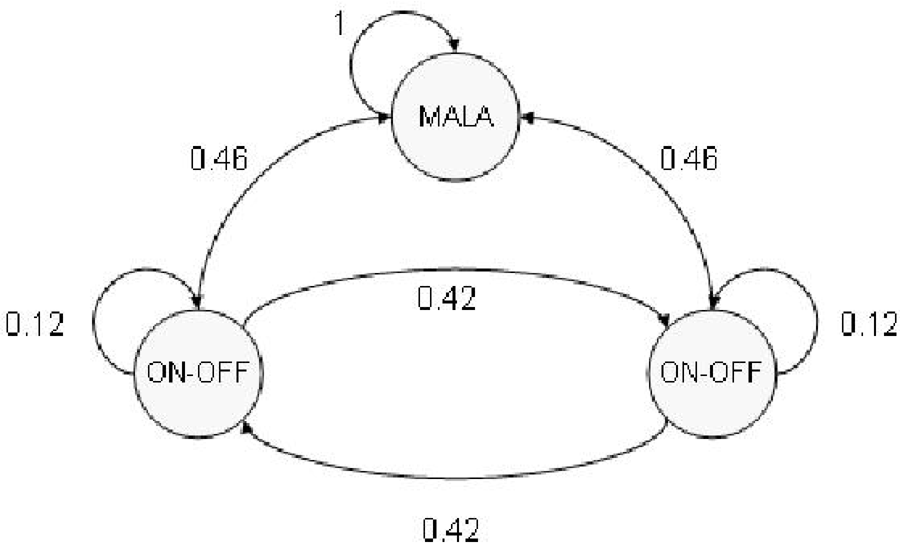
<u>Solución:</u>

a) Como se menciono el el control existían dos posibles interpretaciones para el estado de falla del sistema: Cuando este llegaba a los estados ON-ON ó OFF-OFF, o cuando llegaba al estado ON-ON. Para la primera de las interpretaciones el desarrollo es mucho más fácil, puesto que limitamos el número de estados transientes, lo que simplifica los cálculos. Los desarrollos en los distintos casos son los siguientes:

- Caso ON-ON ó OFF-OFF $\Rightarrow$ FALLA:
  Para calcular las probabilidades de transición es necesario ver qué eventos son los necesarios para tener cada una de las transiciones. Por ejemplo, para pasar del estad ON-OFF al estado OFF-ON es necesario que la componente A se apague y la componente B se encienda, lo que ocurre con una probabilidad $P_{\text{ON-OFF; OFF-ON}} = 0,6 \cdot 0,7 = \frac{21}{50}$. La matriz de transición resultante, siguiendo el mismo tipo de razonamiento es:

		ON-OFF	OFF-ON	Mala
	ON-OFF	$0,4 \cdot 0,3$	$0,6 \cdot 0,7$	$0,4 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,3$
P=	OFF-ON	$0,6 \cdot 0,7$	$0,4 \cdot 0,3$	$0,4 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,3$
	Mala	0	0	1

  La cadena resultante es la que se muestra a continuación:



  Además, podemos ver claramente que existe una única clase recurrente (la del estado "Mala"), mientras que los otros 2 estados pertenecen a una clase transiente. Así existirá una ley de probabilidades estacionarias que estará dada por: $\Pi = [0\,0\,1]$.
- Caso ON-ON $\Rightarrow$ FALLA:
  Analogamente al caso anterior la matriz de transiciones será la siguiente:

		ON-OFF	OFF-ON	OFF-OFF	Mala
	ON-OFF	$0,4 \cdot 0,3$	$0,6 \cdot 0,7$	$0,6 \cdot 0,3$	$0,4 \cdot 0,7$
P=	OFF-ON	$0,6 \cdot 0,7$	$0,4 \cdot 0,3$	$0,4 \cdot 0,7$	$0,6 \cdot 0,3$
	OFF-OFF	$0,6 \cdot 0,3$	$0,4 \cdot 0,7$	$0,4 \cdot 0,3$	$0,6 \cdot 0,7$
	Mala	0	0	0	1

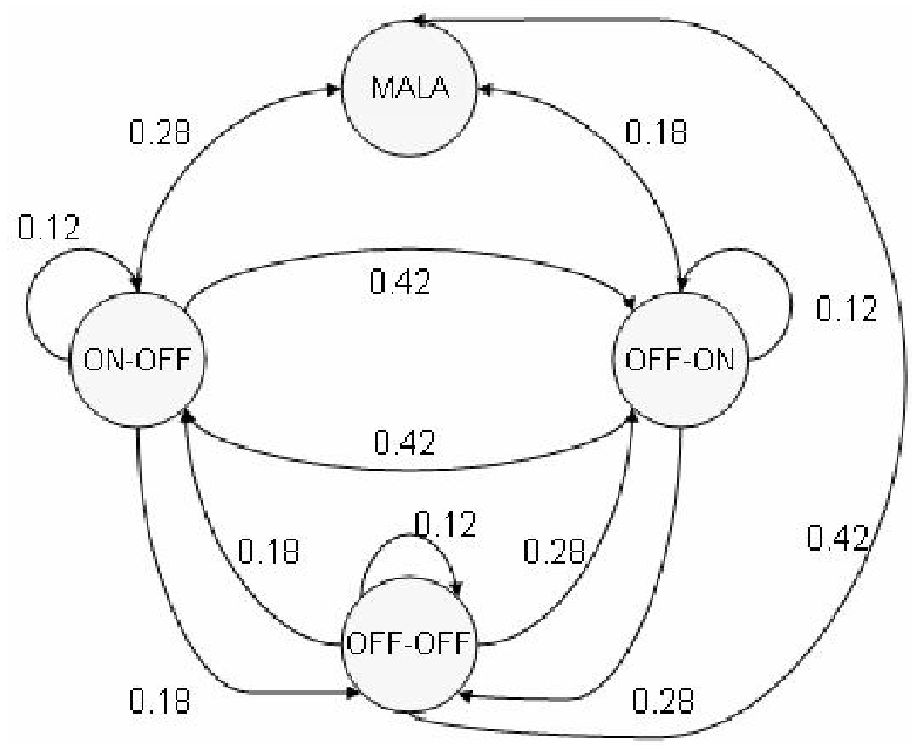
  La cadena resultante es la que se muestra a continuación:

b) Utilizaremos las herramientas de Markov con Beneficios para calcular el tiempo esperado en el transiente. De esta manera, calcular el $\lim_{n\to\infty} V(n)$ se limita a encontrar el vector de relativos asintótico W y elegir la componente asociada al estado ON-OFF.

- Caso ON-ON o OFF-OFF $\Rightarrow$ FALLA:
  De esta manera tendremos que resolver:

$$W_T = \begin{bmatrix} \frac{44}{50} & \frac{-21}{50} \\ \frac{-21}{50} & \frac{44}{50} \end{bmatrix}^{-1} \cdot e_T$$

  Para resolver este sistema NO se necesita invertir la matriz, si nos damos cuenta que comenzar en ON-OFF es equivalente a empezar en OFF-ON porque la situación es simétrica. Si multiplicamos por la matriz P_T debemos calcular:



$$\begin{bmatrix} \frac{44}{50} & \frac{-21}{50} \\ \frac{-21}{50} & \frac{44}{50} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Así, } x = \frac{50}{23}$$

Podemos ver que el tiempo esperado antes de que la máquina falle será $\frac{50}{23}$.

- Caso ON-ON $\Rightarrow$ FALLA:
  Nuevamente tendremos que resolver el siguiente sistema:

$$W_T = \left[I - P_{TT} \right]^{-1} \cdot e_T$$

Donde P_{TT} es la submatriz de transición entre estados transicentes. En este caso TAMPOCO es necesario invertir la matriz, y sólo es necesario resolver un sistema de 2x2 utilizando el mismo argumento de simetría de la parte anterior. As:

$$\begin{bmatrix} 1-0,12 & -0,42 & -0,18 \\ -0,42 & 1-0,12 & -0,28 \\ -0,18 & -0{,}28 & 1-0,12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ocupando la primera y tercera ecuación, se tiene que $y = \frac{10}{7}$ por lo que el tiempo esperado antes de fallar x será igual a

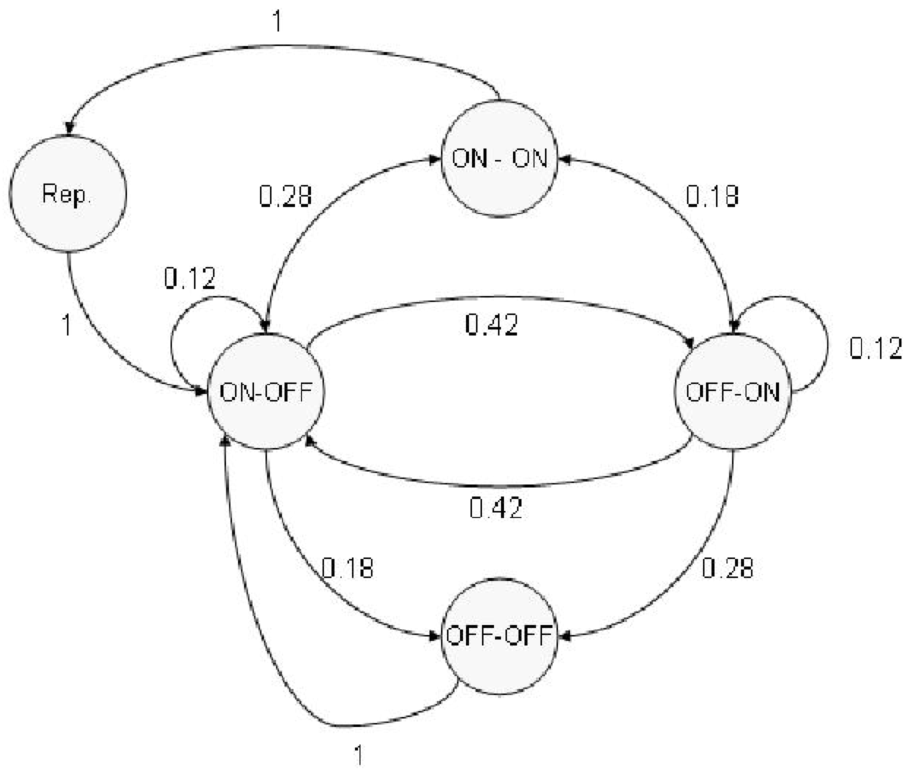
$$x = \frac{1 + 0,18 \cdot \frac{10}{7}}{0,46} = \frac{59}{23}$$

c) En esta parte es necesario separar el motivo por el cual falla la máquina, además de introducir un estado que indique que la máquina está siendo reparada. Por esto bajo ambas interpretaciones, los desarrollos son los mismos. La matriz de transiciones en 1 etapa queda bien representada por:

P=

	ON-OFF	OFF-ON	OFF-OFF	ON-ON	Rep
ON-OFF	$0,4 \cdot 0,3$	$0,6 \cdot 0,7$	$0,4 \cdot 0,7$	$0,6 \cdot 0,3$	0
OFF-ON	$0,6 \cdot 0,7$	$0,4 \cdot 0,3$	$0,6 \cdot 0,3$	$0,4 \cdot 0,7$	0
OFF-OFF	1	0	0	0	0
ON-ON	0	0	0	0	1
Rep	1	0	0	0	0

La cadena toma la siguiente forma:



Podemos ver que existe una única clase recurrente aperiódica (formada por todos los estados), por lo que existirá una ley de probabilidades estacionarias.

d) No estará operando una fracción $\pi_{\text{OFF-OFF}} + \pi_{\text{ON-ON}} + \pi_{\text{Rep}}$

Para calcular este valor es necesario resolver el sistema $\Pi = \Pi \cdot P$. Vamos a dejar todo en función de $\pi_{\text{ON-OFF}}$. Se tiene que:

$\pi_{\text{OFF-ON}} = \frac{23}{50} \cdot \pi_{\text{ON-OFF}}$

$\pi_{\text{OFF-OFF}} = \pi_{\text{ON-ON}} = \pi_{\text{Rep}} = \frac{231}{50} \cdot \pi_{\text{ON-OFF}}$

$\pi_{\text{ON-OFF}}(1 + \frac{23}{50} + 3 \cdot \frac{231}{50}) = 1$ donde se tiene que $\pi_{\text{ON-OFF}} = \frac{50}{766}$

De esta manera, la fracción del tiempo que no estará operativo será $\frac{693}{766}$.

Para calcular el costo esperado de un período en el largo plazo hay que limitarse a calcular g. Así se tendrá $g = C \cdot \pi_{\text{OFF-OFF}} + k \cdot \pi_{\text{ON-ON}}$

3. **Problema 2 (parte Markov discreto), Control 2 Primavera 2002**

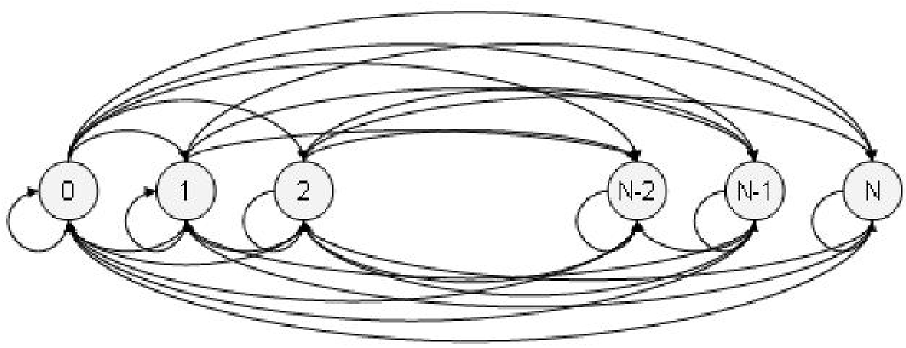
En un cine del sector céntrico se está exhibiendo un exitoso show rotativo, con funciones de exactamente 1 hora de duración y una capacidad de N asientos.

Los espectadores que están dentro de la sala pueden decidir quedarse y repetirse la función, lo que ocurre con una probabilidad r independiente de lo que hagan los demás. Cada vez que termina una función, y se retiran los espectadores que ya se aburrieron del show, se permite la entrada de quienes están esperando afuera, mientras haya capacidad disponible. Si no hay lugar para todos, los que no pueden ingresar se retiran indignados. Los espectadores llegan a la puerta de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa $\lambda_1 \frac{\text{espectadores}}{\text{minuto}}$.

a) (3,0 ptos) Modele el número de espectadores dentro del cine como una cadena de Markov. Explicite las probabilidades de transición de una etapa, comente la existencia de probabilidades estacionarias.

Solución:

1) Claramente debemos modelar la cantidad de personas al interior del cine al comienzo de una función (esto es después de que los que estaban dentro deciden irse y los que llegan por primera vez entran). La cadena asociada es la siguiente:



Del grafo asociado vemos que todos los estados están comunicados entre si por transiciones directas.

Para definir la cadena por completo debo especificar cuales son las probabilidades de transición entre pares de estados. Para esto utilizo probabilidades totales condicionando sobre el número de personas que esta viendo la función y decide continuar:

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \sum_{k=\text{máx}\{0,i-j\}}^{i} P_{ij}(\text{Dado que Se retiran k}) \cdot P[\text{Se retiran k}] \\ &= \sum_{k=\text{máx}\{0,i-j\}}^{i} P_{ij}(\text{Dado que Se retiran k}) \cdot ikr^k(1-r)^{i-k} \end{aligned}$$

Sin embargo el termino restante dependerá de el valor de j:

$$P_{ij}(\text{Dado que Se retiran k}) = \begin{cases} \frac{\lambda_1^{(j-(i-k))} e^{-\lambda_1}}{(j-(i-k))!} & si \quad j < N \\ \sum_{m=(j-(i-k))}^{\infty} \frac{\lambda_1^m e^{-\lambda_1}}{m!} & si \quad j = N \end{cases}$$

Entonces tendremos que:

$$P_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=\text{máx}\{0,i-j\}}^{i} \frac{\lambda_1^{(j-(i-k))} e^{-\lambda_1}}{(j-(i-k))!} \cdot ikr^k(1-r)^{i-k} & j < N \\ \sum_{k=\text{máx}\{0,i-j\}}^{i} \sum_{m=(j-(i-k))}^{\infty} \frac{\lambda_1^m e^{-\lambda_1}}{m!} \cdot ikr^k(1-r)^{i-k} & j = N \end{cases}$$

2) **Problema 1, Control 2 Otoño 2003**

El lanzamiento del último modelo de una conocida marca de automóviles ha revolucionado el mercado nacional. Armijo Catalan, dueño de la franquicia de dicha marca, cuenta con un stock limitado de C de estos bólidos. Nuestro amigo, consciente del impacto de una buena política de precios en la rentabilidad del negocio ha decidido cobrar un precio de $P(i)$[u.m.] por la venta del i-ésimo automóvil, esto es el primer auto se venderá en P(1)[u.m.], el segundo se venderá en P(2)[u.m.], etc.

Armijo ha estudiado largamente la demanda por automoviles de última generación y estima que la llegada de clientes con intenciones de comprar uno de estos se puede modelar como un proceso de Poisson de tasa λ[Clientes/hora].

Armijo sabe que Z_k (el máximo precio que el k-ésimo cliente en llegar esta dispuesto a pagar) es una variable aleatoria de distribución común F. De esta forma el k-ésimo cliente en llegar solo comprará un bólido si el precio de venta es menor o igual a su precio de reserva Z_k.

Sea $Q(t)$ el proceso de conteo de autos vendidos hasta el instante t.

a' (1,0 ptos.) Argumente el porque $Q(t)$ no un proceso de Poisson homogéneo ¿Cual es la esperanza de x_1, tiempo transcurrido hasta la venta del primer automóvil?

b' (1,0 ptos.) Si el primer automóvil se vende en el instante $x_1 = s$, ¿cual es la esperanza del número de clientes que han llegado a la automotora hasta ese instante?.

c' (1,0 ptos.) Calcule la esperanza del tiempo transcurrido hasta que todos los autos son vendidos.

d' (1,5 ptos.) Encuentre P[Q(t)=1]

Armijo Catalan desea que ninguno de sus clientes se vaya con las manos vacías por lo que les ofrece gratis un precioso bolígrafo. Un cliente que llega a la automotora (independiente de si compra o no) aceptará el lápiz con probabilidad q. Suponiendo que Armijo cuenta con muchos bolígrafos, responda:

a' (1,5 ptos.) Si hasta t se han llevado n lápices, ¿cual es la probabilidad que el primer auto ya haya sido vendido?

b' (Bonus, 1,5 ptos.) Encuentre la distribución de x_1, el instante de la primera venta, condicional en que $Q(t) = 1$.[1] Con esto encuentre la esperanza del número de clientes que han visitado la automotora hasta el instante t condicional en que se ha vendido tan solo 1 automóvil.

__**Solución:**__ Sea N(t) el proceso de llegada de gente a la automotora.

a' Claramente $Q(t)$ no es un proceso de Poisson homogéneo. Dado que la tasa de llegada de este proceso depende el número de unidades vendidas la propiedad de incrementos estacionarios y la de incrementos independientes no se cumplirán.

b' Filtraremos el proceso $N(t)$ respecto a clientes que comprar el **primer** auto y clientes que no. La probabilidad que un cliente cualquiera compre el primer auto es $\overline{F}(P(1))$. Por lo tanto el proceso de llegada de clientes que compran el primer auto es Poisson de tasa $\lambda \cdot \overline{F}(P(1))$.

Notamos que este proceso de Poisson es idéntico al proceso de venta de automoviles $Q(t)$ hasta que el primer auto es vendido. En este instante nuestro proceso filtrado mantiene su tasa $\lambda\overline{F}(P(1))$ mientras que $Q(t)$ pasa a tener una tasa $\lambda\overline{F}(P(2))$. Dado que nuestros cálculos se refieren a instantes menores o iguales al instante de venta del primer auto el desarrollo es valido para $Q(t)$

Por otro lado nosotros sabemos que los tiempos entre llegadas de un proceso de poisson de tasa λ son variables aleatorias exponenciales de parámetro λ. Por esto tendremos que:

$$E[x_1] = \int_0^\infty t \cdot \lambda\overline{F}(P(1)) \cdot e^{-\lambda\overline{F}(P(1))t} dt = \frac{1}{\lambda\overline{F}(P(1))}$$

[1] Utilice que $P[x_1 \leq s | Q(t) = 1] = P[Q(s) = 1 | Q(t) = 1]$

c' Nuevamente filtramos $N(t)$. El proceso de personas que llegan hasta la automotora y no comprar, para t menores al instante de venta del primer auto es Poisson de tasa $\lambda \cdot F(P(1))$.

Entonces $N(t) - Q(t)$ hasta el instante de la primera venta se comporta como un proceso de Poisson de tasa $\lambda \cdot F(P(1))$
Entonces:

$$\begin{aligned} E[N(t)|x_1 = t] &= 1 + E[N(t) - Q(t)] \\ &= 1 + \lambda \cdot F(P(1)) \cdot t \end{aligned}$$

d' Como vimos, si filtramos el proceso de llegada de clientes hasta el instante de la venta del primer auto concluiremos que el proceso de venta hasta ese instante es poisson de tasa $\lambda\overline{F}(P(1))$. Desde ese instante en adelante (y reiniciando nuestro reloj) tendremos que el proceso de llegada de clientes que compran es Poisson de tasa $\lambda\overline{F}(P(2))$. De esta forma, desde el instante de la venta del (i-1)-ésimo automóvil el proceso de venta es Poisson de tasa $\lambda\overline{F}(P(i))$ hasta el instante de venta del i-ésimo. Ahora, dado que el tiempo entre arribos de un proceso de Poisson se distribuye exponencial tendremos que:

$$E[\text{Tiempo total de venta}] = \sum_{i=1}^{C} x_i$$

Donde $x_i \rightsquigarrow exp(\lambda \cdot \overline{F}(P(i)))$, tiempo entre llegadas del proceso. De esta forma:

$$E[\text{Tiempo total de venta}] = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{C} \frac{1}{\overline{F}(P(i))}$$

e' Claramente de la parte 1 $x_1 \rightsquigarrow exp(\lambda \cdot \overline{F}(P(1))$. Condicionando sobre el instante de venta del primer auto vemos que (suponiendo que $P(1) \neq P(2)$):

$$\begin{aligned} P[Q(t) = 1] &= \int_0^t P[Q(t) = 1|x_1 = s] \cdot \lambda \cdot \overline{F}(P(1)) e^{-\lambda \cdot \overline{F}(P(1))s} ds \\ &= \int_0^t e^{-\lambda \cdot \overline{F}(P(2))(t-s)} \cdot \lambda \cdot \overline{F}(P(1)) e^{-\lambda \cdot \overline{F}(P(1))s} ds \\ &= \frac{\overline{F}(P(1))}{\overline{F}(P(1)) - \overline{F}(P(2))} \left[e^{-\lambda\overline{F}(P(2))t} - e^{-\lambda\overline{F}(P(1))t} \right] \end{aligned}$$

f' Calculemos primero la probabilidad de no haber vendido el auto. Sean:

$N^x(t)$ = proceso de llegada de gente que no se lleva lápices y que compra.
$N^l(t)$ = proceso de llegada de gente que se lleva lápices.

Hasta x_1, $N^x(t)$ tiene tasa $\lambda \cdot \overline{F}(P(1)) \cdot (1-q)$ y $N^l(t)$ tiene tasa $\lambda \cdot q$. Ahora simplemente debemos imponer que ninguno de estos tipos haya llegado hasta t y además que de los n que se llevaron lápices ninguno haya comprado. Esto es:

$$\begin{aligned} P[x_1 > t|N^l(t) = n] &= P[N^x(t) = 0] \cdot F(P(1))^n \\ &= e^{-\lambda \cdot \overline{F}(P(1)) \cdot (1-q) \cdot t} \cdot F(P(1))^n \end{aligned}$$

Entonces la probabilidad que buscamos es:

$$P[x_1 \leq t|N^l(t) = n] = 1 - P[x_1 > t|N^l(t) = n]$$

g' **Bonus.** Encontraremos $P[x_1 \leq s|Q(t)=1]$, con $t \geq s$, usando el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P[x_1 \leq s|Q(t)=1] &= P[Q(s)=1|Q(t)=1] \\ &= \frac{P[Q(t)=1|Q(s)=1]\cdot P[Q(s)=1]}{P[Q(t)=1]} \end{aligned}$$

Pero

$$P[Q(t)=1|Q(s)=1] = e^{-\lambda\overline{F}(P(2))(t-s)}$$

Utilizando el resultado del punto 4 vemos que:

$$P[x_1 \leq s|Q(t)=1] = \frac{e^{-\lambda\overline{F}(P(2))(t-s)}\cdot\left[e^{-\lambda\overline{F}(P(2))s} - e^{-\lambda\overline{F}(P(1))s}\right]}{\left[e^{-\lambda\overline{F}(P(2))t} - e^{-\lambda\overline{F}(P(1))t}\right]}$$

Entonces $f(x_1|Q(t)=1) = \frac{d(P[x_1\leq s|Q(t)=1])}{ds}$
Sea $R(t)$ el número de clientes que han llegado dado que hasta t solo se ha vendido un auto. A partir del instante de la primera venta la intensidad de llegada (la tasa) varia. Entonces para responder esta parte debemos identificar el punto en el cual la tasa varia. Sin embargo nosotros sabemos la distribución de dicho punto (de parte anterior). Definiendo $N_i(t)$ como un proceso de Poisson de tasa $\lambda \cdot F(P(i))$, tendremos que:

$$\begin{aligned} E[R(t)|x_1=s] &= 1 + E[N_1(s)] + E[N_2(t-s)] \\ &= 1 + (\lambda\cdot F(P(1))\cdot s) + (\lambda\cdot F(P(2))\cdot(t-s)) \end{aligned}$$

Descondicionando:

$$\begin{aligned} E[R(t)] &= \int_0^t E[R(t)|x_1=s]\cdot f(s|Q(t)=1)ds \\ &= 1 + \int_0^t (\lambda\cdot F(P(1))\cdot s) + (\lambda\cdot F(P(2))\cdot(t-s))\cdot f(s|Q(t)=1)ds \end{aligned}$$

No es necesario desarrollar más la expresión.

3) **Problema 1, Control 2 Primavera 2003**

Un Centro Médico es atentido por un único médico conocido como Pepe, ex-vocalista del famoso grupo Pepe y Los Markovianos. La sala de espera de la consulta tiene capacidad para sólo dos personas, y los pacientes que llegan y encuentran ambos espacios ocupados se retiran indignados.

Según datos históricos, Pepe sabe que el tiempo que transcurre desde que un paciente comienza a ser atentido hasta que se va de la consulta, es exactamente una hora para una fracción p de los clientes, y de dos horas para una fracción q, con $q = 1-p$. Ningún paciente permanece más de dos horas siendo atendido por el médico.

Las distribuciones de probabilidad de la cantidad de pacientes que llegan al consultorio en una hora son conocidas. La probabilidad que lleguen en una hora k pacientes, dado que al comienzo de esta hora había i pacientes dentro del local es α_{ik}.

Al comienzo de cada hora, si el doctor está desocupado acude a la sala de espera del Centro. Si hay pacientes esperando, atiende al que corresponda, según orden de llegada. Si la sala de espera está vacía no atenderá pacientes durante **toda** esa hora, y se dedicará a rememorar viejos tiempos desempolvando su guitarra del baúl de los recuerdos. No obstante, mientras el doctor no está atendiendo, los pacientes pueden seguir llegando al Centro Médico y entrarán en el caso que hayan lugares disponibles para esperar. En caso que un paciente entra al sistema en esta situación tendrá la fortuna de escuchar los viejos éxitos de Pepe.

Por último, suponga que inicialmente el consultorio está vacío con el doctor tocando guitarra, y que el médico atiende por suficiente tiempo tal que se alcanza el régimen estacionario.

a' (3,0 pts.) Modele el estado de ocupación del Centro Médico al comienzo de cada hora, como una Cadena de Markov en Tiempo Discreto. Encuentre las probabilidades de transición en función de las probabilidades α_{ik} y del resto de los parámetros del problema. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias.

b' Considere que al médico le interesa conocer el comportamiento del sistema en el Largo Plazo, para lo cual requiere conocer las expresiones que se detallan a continuación. Asumiendo conocidas las probabilidades estacionarias, calcule:

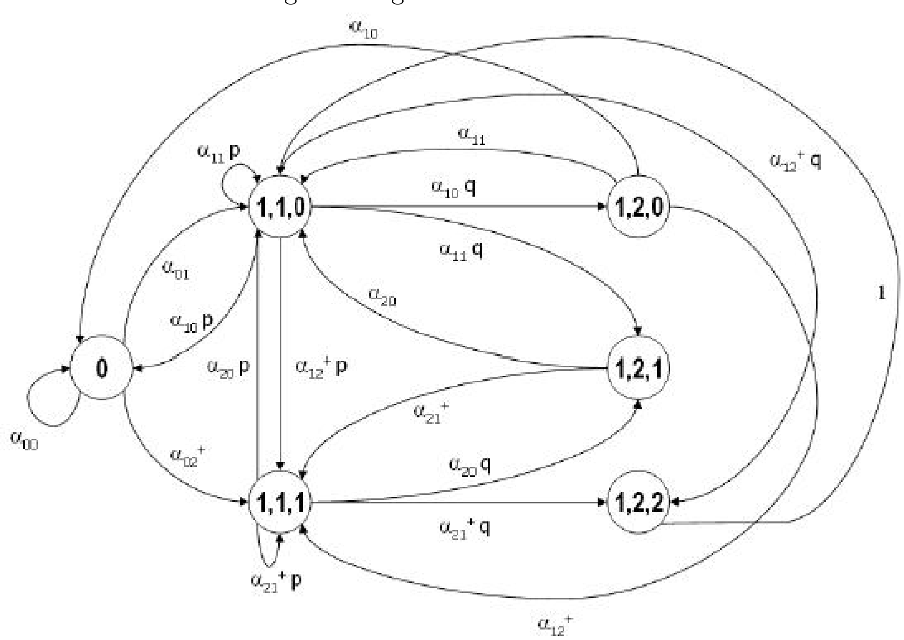
c' (1,0 pto.) La esperanza de la cantidad de pacientes que en una hora, se retiran indignados sin poder ingresar al Centro Médico.

d' (1,0 pto.) La probabilidad de que un paciente que logra entrar al sistema, sea atendido al comienzo del período siguiente al de su arribo. Asuma que el tiempo entre llegada de pacientes son variables aleatorias exponenciales i.i.d de parámetro λ_i si al inicio de la hora correspondiente hay i personas dentro del consultorio.

e' (1,0 pto.) La cantidad promedio de pacientes que en una hora, disfrutan de la música de Pepe.

<u>Solución:</u>

a' La cadena se muestra en la siguiente figura:



El estado (0) representa el consultorio vacío. Por otro lado en los estados de la forma (a, b, c), a es el número de personas en atención, b en la hora de atención en que se encuentra y c la cantidad de personas esperando.

Vemos que existe una única clase recurrente, aperiódica, conformada por la totalidad de los estados de la cadena. Por lo tanto, existen probabilidades estacionarias.

b' En esta parte consideramos conocido el vector Π de probabilidades estacionarias.

c' Para responder a esta pregunta debemos ver que condiciones deben darse en cada estado para que existan pacientes que se retiren indignados. Esto sucede en los siguientes casos:

- (0): Todos los pacientes que lleguen después del segundo (i.e., a partir del tercero).

- $(1,1,0)$: Todos los pacientes que lleguen después del segundo.
- $(1,1,1)$: Todos los pacientes que lleguen, menos el primero.
- $(1,2,0)$: Todos los pacientes que lleguen después del segundo.
- $(1,2,1)$: Todos los pacientes que lleguen, menos el primero.
- $(1,2,2)$: Todos los pacientes que lleguen.

Por lo tanto, denotando por E_1 a la esperanza de la cantidad de pacientes que una hora se retiran indignados se tiene que

$$\begin{aligned} E_1 &= \Pi_0 \cdot \sum_{k>2}(k-2)\cdot\alpha_{0k} + \Pi_{(1,1,0)} \cdot \sum_{k>2}(k-2)\cdot\alpha_{1k} + \Pi_{(1,1,1)} \cdot \sum_{k>1}(k-1)\cdot\alpha_{2k} \\ &\quad + \Pi_{(1,2,0)} \cdot \sum_{k>2}(k-2)\cdot\alpha_{1k} + \Pi_{(1,2,1)} \cdot \sum_{k>1}(k-1)\cdot\alpha_{2k} + \Pi_{(1,2,2)} \cdot \sum_{k>0} k\cdot\alpha_{3k}\,. \end{aligned}$$

d' Si un paciente logró entrar al sistema pudo haberlo hecho en los siguientes estados: (0), $(1,1,0)$, $(1,2,0)$, $(1,1,1)$ o $(1,2,1)$. Por lo tanto, dado que el paciente entró al sistema, los "casos favorables" a considerar son los asociados a estos cinco estados.

Para determinar los "casos favorables" analicemos lo que sucede en cada uno de estos estados.

- Estados $(1,1,1)$ y $(1,2,1)$: En estos estados el paciente nunca será atendido en la siguiente hora, ya que ya había una persona esperando y ella será atendida antes (recuerde que el médico atiende por orden de llegada).
- Estado (0): El paciente será atendido en la próxima hora si es el primero en llegar. Esto puede suceder si es el único en llegar o si llegan más de uno y es el primero de ellos.
- Estado $(1,1,0)$: Este caso es análogo al anterior, pero hay que considerar la posibilidad de que el paciente que actualmente se está atendiendo requiera una segunda hora con el médico.
- Estado $(1,2,0)$: Este caso es análogo al caso del estado (0).

Denotemos por Π_{CT} a la probabilidad de estar en alguno de los cinco estados "favorables", es decir

$$\Pi_{CT} = \Pi_0 + \Pi_{(1,1,0)} + \Pi_{(1,2,0)} + \Pi_{(1,1,1)} + \Pi_{(1,2,1)}\,.$$

Por lo tanto, la probabilidad pedida es:

$$P = \frac{1}{\Pi_{CT}}\left[\Pi_0\left(\alpha_{01} + \tfrac{1}{2}\alpha_{02}^{+}\right) + \Pi_{(1,1,0)}\cdot p\left(\alpha_{11} + \tfrac{1}{2}\alpha_{12}^{+}\right) + \Pi_{(1,2,0)}\left(\alpha_{21} + \tfrac{1}{2}\alpha_{22}^{+}\right)\right]$$

4) **Problema 3, Control 1 Primavera 2003**

Problema 3

A una tienda comercial llegan clientes según un proceso Poisson de tasa λ [clientes/semana]. La tienda ofrece dos productos: Tipo A y Tipo B. Cada uno de los clientes que llega a la tienda está interesado en un determinado tipo de productos. Específicamente, un cliente cualquiera está interesado en el producto Tipo A con probabilidad q_A y en el producto Tipo B con probabilidad q_B (observe que $q_A + q_B = 1$). Los clientes llegan sin conocer de antemano cuál es el precio del producto correspondiente. Además, cada cliente compra, a lo más, una unidad del producto que desea.

Los clientes son heterogéneos en el sentido que su disposición a pagar por el producto es distinta. Entendemos por disposición a pagar la mayor cantidad de dinero que el cliente estaría dispuesto a pagar por el producto. Desde el punto de vista de la tienda la disposición a pagar d_i de un cliente cualquiera interesado en el producto i es una variable aleatoria con función de densidad $f_i(d_i)$ continua en $[0, \infty)$ y función de distribución $F_i(d_i)$ conocidas. Un cliente compra el producto si su disposición a pagar es mayor o igual que el precio al que la tienda lo vende, siempre que la tienda tenga productos en inventario; en caso contrario se va sin comprar. Suponga que la tienda dispone de inventarios iniciales S_A y S_B para cada uno de los productos, y que no es posible reabastecerse en ninguno de las T semanas del horizonte bajo estudio.

Por último, suponga que los precios unitarios a cobrar por cada producto son P_A y P_B, respectivamente.

1. (1,0 pto.) Si un cliente llega interesado en el producto Tipo i ¿Cuál es la probabilidad que este cliente esté dispuesto a comprarlo? ¿Cuál es la probabilidad de que el stock del producto i se agote antes del final de la semana t desde el inicio de la temporada ($0 < t < T$)?

2. Dado que en las primeras t_1 semanas de la temporada llegaron R clientes a la tienda, con $R > S_A$, responda:

   a) (0,5 ptos.) ¿Cuál es la probabilidad de que se hayan vendido n productos tipo A?

   b) (1,5 ptos.) ¿Cuál es la probabilidad que en la primeras t_2 semanas de atención se hayan vendido más productos Tipo A que Tipo B? ($t_1 > t_2 > 0$).

3. (1,5 ptos.) Encuentre la función de distribución de probabilidades la cantidad de productos Tipo B que se venden antes de la venta del primer producto Tipo A ¿Cuál es la probabilidad de que se agote el stock de productos Tipo B, antes de que se venda el primer producto Tipo A?

4. (0,5 ptos.) Calcule la esperanza de la cantidad total de productos en stock al final del horizonte.

5. (1,0 pto.) Entregue una expresión para el ingreso esperado por ventas en el horizonte de T semanas bajo estudio.

Solución:
En lo que sigue, se usará la siguiente notación:
$N(t) =\#$ total de clientes que llegan hasta t
$N_i(t) =\#$ de clientes que llegan hasta t interesados en producto i y con disposición a pagar mayor al precio
$\overline{q}_i =$ Prob. que un cliente esté interesado en producto tipo i y con disposición a pagar mayor al precio.

a' Para que un cliente que llega interesado en el producto Tipo i de precio P_i, lo compre se debe tener que la disposición a pagar por dicho producto d_i sea mayor o igual al precio del producto. Luego la probabilidad pedida es:

$$P[d_i \geq P_i] = 1 - P[d_i < P_i] = 1 - F_i(P_i) = \overline{F}_i(P_i)$$

El proceso de demanda del producto Tipo i también es un Proceso de Poisson. Dada una probabilidad de demanda para el producto Tipo i igual a:

$$\overline{q}_i = q_i \cdot \overline{F}_i(P_i)$$

se tiene que la llegada de clientes que demandan un producto Tipo i sigue un proceso de poisson de tasa:

$$\overline{\lambda}_i = \lambda \cdot \overline{q}_i$$

entonces la probabilidad que $N_i(t)$ sea igual a k, será:

$$P[N_i(t) = k] = \frac{(\overline{\lambda}_i \cdot t)^k e^{-\overline{\lambda}_i \cdot t}}{k!}$$

Luego para que para calcular la probabilidad de que el stock del producto Tipo i se agote antes del final de la semana t se tiene que la demanda debe ser mayor al inventario disponible al principio de la temporada. Es decir:

$$P[N_i(t) \geq S_i] = \sum_{k=S_i}^{\infty} P[N_i(t) = k]$$

b'

c' Dado que la probabilidad que c/u de los R clientes que llegaron, independiente de los demás, demanden el producto Tipo A es $\overline{q}_A = q_A \cdot \overline{F}_A(P_A)$, se tiene que:

$$P[N_A(t_1) = n \,/\, N(t_1) = R] = \begin{cases} Rn(\overline{q}_A)^n(1-\overline{q}_A)^{R-n} & \text{si} \quad n < S_A \\ \displaystyle\sum_{k=S_A}^{\infty} Rk(\overline{q}_A)^k(1-\overline{q}_A)^{R-k} & \text{si} \quad n = S_A \\ 0 & \text{si} \quad n > S_A \end{cases}$$

d' Para calcular la probabilidad de que se vendan más productos Tipo A durante las primeras t_2 semanas es necesario conocer la distribución de probabilidades de la cantidades demandadas de cada producto en dicho intervalo de tiempo.

Dado que el instante de llegada de c/u de los R clientes que llegaron a la tienda en las primeras t_1 sigue una distribución Uniforme en el intervalo $[0, t_1]$, la probabilidad que un cliente en particular llegue en las primeras t_2 semanas y demande un producto Tipo i, será:

$$\overline{q}_i^{t_2} = \frac{t_2}{t_1} \cdot \overline{q}_i = \frac{t_2}{t_1} \cdot q_i \cdot \overline{F}_i(P_i)$$

Es importante notar que el proceso inicial de llegada se filtra en los 3 siguientes Procesos de Poisson:

- Proceso de llegada de clientes que demandan el producto Tipo A antes de t_2.
- Proceso de llegada de clientes que demandan el producto Tipo B antes de t_2.
- Proceso de llegada de clientes interesados en uno de los 2 productos pero que no lo demandan antes de t_2, más los clientes que llegan después de t_2.

Para calcular la probabilidad pedida es necesario conocer la distribución de probabilidades de la cantidad de llegadas de cada uno de los procesos. Sea $r^{t_2}_{(n_A,n_B,R)}$, la probabilidad de que hasta el instante t_2 la demanda por el producto Tipo A sea n_A, por el producto Tipo B sea n_B, y el resto de las llegadas correspondan al tercer proceso de llegada.

Luego, se tiene que:

$$r^{t_2}_{(n_A,n_B,R)} = \frac{R!}{n_A!n_B!(R-(n_A+n_B)!}(\overline{q}^{t_2}_A)^{n_A}(\overline{q}^{t_2}_B)^{n_B}(1-(\overline{q}^{t_2}_A+\overline{q}^{t_2}_B))^{R-(n_A+n_B)}$$

Luego la probabilidad de que en las primeras t_2 semanas de atención se hayan vendido más productos Tipo A que Tipo B está dada por:

- Si $S_A > S_B$.

$$P[\text{Ventas A} > \text{Ventas B}] = \sum_{n_A=1}^{S_B}\sum_{n_B=0}^{n^*_B} r^{t_2}_{(n_A,n_B,R)} + \sum_{n_A=S_B+1}^{R} Rn_A(\overline{q}_A)^n_A(1-\overline{q}_A)^{R-n_A}$$

donde: $n^*_B = \text{mín }(n_A-1, R-n_A)$

- Si $S_A \leq S_B$.

$$P[\text{Ventas A} > \text{Ventas B}] = \sum_{n_A=1}^{S_A-1}\sum_{n_B=0}^{n^*_B} r^{t_2}_{(n_A,n_B,R)} + \sum_{n_A=S_A}^{R}\sum_{n_B=0}^{n^{**}_B} r^{t_2}_{(n_A,n_B,R)}$$

donde: $n^{**}_B = \text{mín }(S_A-1, R-n_A)$

e' Dado que los tiempos entre llegadas de un proceso de Poisson de tasa λ son variables aleatorias que siguen una distribución exponencial de parámetro λ, se tiene que para calular la probabilidad pedida se debe *"hacer competir"* las exponenciales que rigen las demandas de ambos productos.

Sea $P[N^k_B]$ la probabilidad que se vendan k productos Tipo B antes del primero Tipo A. Luego se tiene que:

$$P[N^k_B] = \begin{cases} \left(\frac{\overline{\lambda}_B}{\overline{\lambda}_A+\overline{\lambda}_B}\right)^k \cdot \left(\frac{\overline{\lambda}_A}{\overline{\lambda}_A+\overline{\lambda}_B}\right) & \text{si} \quad k < S_B \\ \left(\frac{\overline{\lambda}_B}{\overline{\lambda}_A+\overline{\lambda}_B}\right)^{S_B} & \text{si} \quad k = S_B \\ 0 & \text{si} \quad k > S_B \end{cases}$$

Por otro lado la probabilidad de que se agote el stock de productos Tipo B, antes de que se venda el primer producto Tipo A está dado por:

$$P[\text{Agota B antes de primera venta de A}] = \left(\frac{\overline{\lambda}_B}{\overline{\lambda}_A+\overline{\lambda}_B}\right)^{S_B}$$

f' La esperanza de la cantidad total de productos en stock al final del horizonte es la suma de la esperanza de los productos en stock de cada tipo en dicho instante. Luego se tiene que:

$$\begin{aligned} E[S^T] &= E[S_A^T] + E[S_B^T] \\ &= \sum_{k=0}^{S_A} (S_A - k) \cdot P[N_A(T) = k] + \sum_{k=0}^{S_B} (S_B - k) \cdot P[N_B(T) = k] \end{aligned}$$

donde:

$$P[N_i(t) = k] = \frac{(\overline{\lambda}_i \cdot t)^k e^{-\overline{\lambda}_i \cdot t}}{k!}$$

g' La esperanza de los ingresos por ventas está dada por:

$$E[\mathsf{Ingresos}] = \sum_{i=A,B} P_i \left[\sum_{k=1}^{S_i} i \cdot P[N_i(T) = k] + \sum_{k=S_i+1}^{\infty} S_i \cdot P[N_i(T) = k] \right]$$

5) **Problema 2, Control 1 Primavera 2003**

Tras una celebre visita a Haiti, el alcalde de Santiago ha decidido centrar sus esfuerzos en la elección de su reemplazante como edil de la capital. Para esto Joaquín se he reunido con su equipo de asesores, todos ellos ingenieros civiles industriales. La situación inicial de la campaña electoral es la siguiente: Existe un total de N personas registradas para participar en la próxima elección del alcalde de Santiago. Cada una de estas personas puede votar a favor del candidato de la Alianza por Chile o por el candidato de la Concertación.

Tras un arduo trabajo estadístico el equipo a logrado descifrar el comportamiento electoral de los habitantes de la comuna de Santiago.

De acuerdo a la evidencia empírica recolectada, un votante normal apoyará a un candidato dependiendo del resultado actual de las encuestas. Esto es, si al comienzo de una semana cualquiera, las encuestas indican que k personas apoyan uno de los candidatos, entonces con probabilidad k/N la persona apoyará a ese candidato al comienzo de la próxima semana.

Uno de los asesores de Lavin afirma que el comportamiento electoral de las personas recién descrito es tan solo cierto para las personas que apoyan al candidato que va perdiendo en las encuestas, mientras que las personas que apoyan al candidato que va ganando solo cambiarán de opinión de acuerdo a una probabilidad q_c, independiente del resultado de las encuestas, y fuese ganando el candidato de la Concertación y q_a en el caso de la Alianza. Considere N impar.

1. (1,5 ptos.) Suponiendo que el candidato de la alianza va arriba en las encuestas con k votos, ¿cuál es la probabilidad que j votantes que piensan en apoyar al candidato de la concertación cambien de opinion? cuál es la probabilidad que i votantes que prefieren al candidato de la alianza cambien de parecer?

2. (1,5 ptos.) Modele el número de personas que votaría por el candidato de la Alianza por Chile al comienzo de cada semana como una cadena de markov en tiempo discreto. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias. Denomine a esta ley π_{q_c,q_a}.

Considere ahora que ambas coaliciones políticas deben elegir quienes serán sus candidatos. Cada una cuenta con 2 posibles candidatos (póngales nombre) que deben ser definidos en las próxminas semánas.
Diariamente, los partidos anuncian quien sería su candidato en el caso de tener que elegir uno. La dinámica de estos anuncios es la siguiente: Si al comienzo de un día el pre-candidato de la Concertación (Alianza) es la opción X (A o B) entonces con probabilidad $P_a(X)$ ($P_c(X)$) a la mañana siguiente el pre-candidato de la alianza (Concertación) habrá cambiado.

Suponga que las inscripciones de los candidatos se realiza en 1 mes más y que a partir de entonces se comienzan a realizar encuestas (las que durarán 5 meses hasta el instante de las elecciones). Además suponga que las probabilidades q_c y q_a indicadas al comienzo de este enunciado dependen del candidato escogido por cada partido.

$$q_a(A) = 0{,}3 \qquad q_a(B) = 0{,}6 \qquad\qquad q_c(A) = 0{,}4 \qquad q_c(B) = 0{,}2$$

3. (1,0 ptos.) Modele la evolución diaria de las pre-candidaturas a alcalde de Santiago como una cadena de Markov en tiempo discreto. Justifique existencia de probabilidades estacionarias

4. (1,0 ptos.) Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias de la parte 2, encuentre una expresión para la probabilidad de que el proximo alcalde de Santiago pertenezca al oficialismo.

5. (1,0 ptos.) Suponiendo que si un pre-candidato se mantiene en las preferencias de su partido durante 2 días consecutivos entonces su candidatura es definitiva, modele nuevamente la evolución diaria de las pre-candidaturas. Justifique o rechace la existencia de probabilidades estacionarias.

1. Si el candidato de la Alianza va arriba con k votos, la concertación tiene $N-k$ votos. Dado que van perdiendo la probabilidad que cada uno de ellos se cambie es $\frac{k}{N}$. La probabilidad que se cambien j será entonces:

$$R_C(k,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 > j > N-k \\ \binom{N-k}{j}\left(\frac{k}{N}\right)^j \cdot \left(\frac{N-k}{N}\right)^{N-k-j} & \sim \end{cases}$$

Cada uno de los adherentes al candidato de la Alianza se cambiará con probabilidad q_a. La probabilidad que se cambien i será entonces:

$$B_A(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 > i > k \\ \binom{k}{i} q_a^j \cdot (1-q_a)^{k-j} & \sim \end{cases}$$

2. La forma de la cadena es más o menos obvia, $N+1$ nodos donde el estado representa el número de personas apoyando al candidato de la alianza.

   Usaremos las prob. calculadas antes más las derivadas del caso cuando la concertación va ganando en las encuestas. Así las funciones que utilizaremos serán $R_A(i)$, $R_C(j)$ (que tienen la misma forma) y $B_A(i)$ y $B_C(j)$ calculadas con q_a y q_c respectivamente

   Las transciciones son posibles entre cada par de estado. Para calcular las prob. de transición condicionamos sobre el número de personas que votaban por la alianza y ahora se cambian a la concertacción. Claramente distinguimos sobre quien va ganando las encuestas para conocer las probabilidades de cambio individuales.

   El caso genérico es fácil de construir con las probabilidades calculadas en las partes anteriores. Si k personas votan actualmente por la alianza y i de ellas cambian de bando entonces para que finalmente h personas voten por la alianza es necesario que $N-k-(h-i)$ de las $N-k$ personas que votan por la concertación cambien de bando.

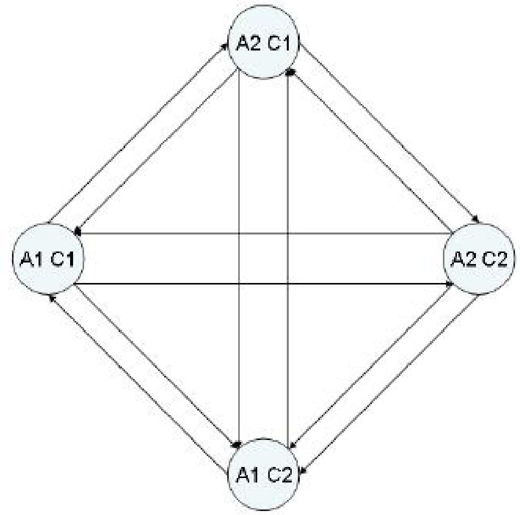
   - Caso 1: $k > n/2$ (Gana la alianza).

$$P_{kh} = \sum_{i=0}^{k} R_A(i) \cdot B_C(N-k-(h-i))$$

   - Caso 2: $k < n/2$ (Gana la concertación).

$$P_{kh} = \sum_{i=0}^{k} B_A(i) \cdot R_C(N-k-(h-i))$$

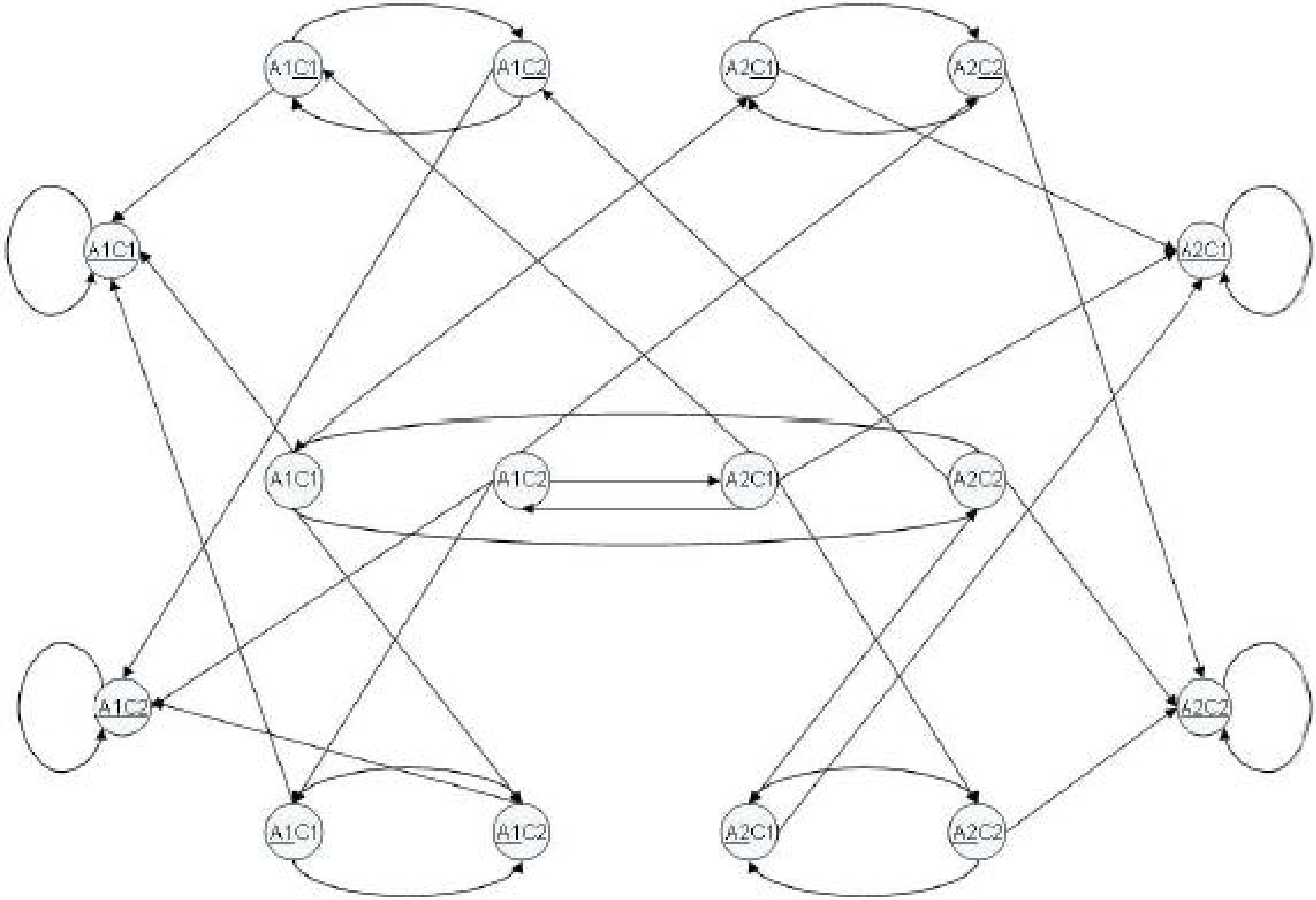
2.La cadena es la que se muestra a continuación:



La matriz de Transición es la siguiente (considerando los estados el siguiente orden: A1C1, A1C2, A2C1, A2C2 y denotando $P' = (1 - P)$)

$$\begin{pmatrix} P'_A(C1)P'_C(A1) & P'_A(C1)P_C(A1) & P_A(C1)P'_C(A1) & P_A(C1)P_C(A1) \\ P'_A(C2)P_C(A1) & P'_A(C2)P'_C(A1) & P'_A(C2)P'_C(A1) & P_A(C2)P'_C(A1) \\ P_A(C1)P'_C(A2) & P'_A(C1)P'_C(A2) & P'_A(C1)P'_C(A2) & P'_A(C1)P_C(A2)) \\ P_A(C2)P_C(A2) & P_A(C2)P'_C(A2) & P'_A(C2)P_C(A2) & P'_A(C2)P'_C(A2) \end{pmatrix}$$

4. La cadena es la que se muestra a continuación (Cuando un candidato esta marcado significa que es candidato definitivo.):


A1C1
A1C2
A2C1
A2C2
A1C1
A2C1
A1C1
A1C2
A2C1
A2C2
A1C2
A2C2
A1C1
A1C2
A2C1
A2C2