Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: P. Rey, D. Sauré, R. Epstein.
Aux : C. Berner, M. Guajardo, A. Neely, D. Yung

Clase Auxiliar 26 de Abril, 2005

# Procesos de Poisson

## Problema 1

1. Sea $N_m$= Número de personas que se suben al m-esimo bus. Sea $x_m$= tiempo entre llagada del bus m-1 y el m-esimo.
$$P(N_m = j|x_m = t) = \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^j}{j!}$$

2. Tenemos que descondicionar el resultado de la parte anterior:
$$P(N_m = j) = \int_0^\infty P(N_m = j|x_m = t) \cdot f_{x_m}(t)\partial t$$
donde $f_{x_m}(t)$ es la densidad del tiempo entre el bus m-1 y el m-esimo. Sin embargo sabemos que $f_{x_m}(t) \rightarrow exp(\lambda)$. Entonces:
$$P(N_m = j) = \int_0^\infty \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^j}{j!} \cdot \lambda e^{-\lambda t}\partial t$$
$$P(N_m = j) = \frac{\lambda\mu^j}{(\lambda+\mu)^{j+1}} \int_0^\infty \frac{(\lambda+\mu)^{j+1}t^j e^{-(\lambda+\mu)t}\partial t}{j!}$$
Dado que lo que queda dentro de la integral es la densidad de probabilidad de una $Gamma(j+1, \lambda+\mu)$ se tiene que:
$$P(N_m = j) = \frac{\lambda\mu^j}{(\lambda+\mu)^{j+1}}$$

3. Si un bus llega a las 10:30 y no llegan buses entre 10:30 y 11:00 el número de pasajeros que se subira al proximo bus será $N_1 + N_2$ donde:
   - $N_1$= Número de personas que se sube entre 10:00 y 11:00.
   - $N_2$= Número de personas que se sube a partir de las 11:00.

   Entonces:
$$P(N_m = n) = \sum_{j=0}^{n} P(N_1 = j \wedge N_2 = n - j)$$
$$P(N_m = n) = \sum_{j=0}^{n} P(N_1 = j) \cdot P(N_2 = n - j)$$
$$P(N_m = n) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-\frac{\mu}{2}} \sum_{j=0}^{n} \frac{\frac{\mu}{2}^k}{k!} (\frac{\mu}{\lambda+\mu})^{n-k}$$
$$P(N_m = n) = \frac{\lambda\mu^n}{(\lambda+\mu)^{n+1}} e^{-\frac{\mu}{2}} \sum_{j=0}^{n} [\frac{\lambda+\mu}{2}]^k \cdot \frac{1}{k!}$$

4. El número de pasajeros esperando en cualquier instante si el proceso comenzó hace "mucho tiempo" $\Rightarrow$ independiente del instante, la distribución de probabilidad de la gente esperando sigue la misma distribución de probabilidad de la parte 2.

$$P(N_e = k) = (\frac{\lambda}{\lambda+\mu}) \cdot (\frac{\mu}{\lambda+\mu})^k$$

5. Sean:

   - $N_1$= Número de personas que esta esperando a las 2:30
   - $N_2$= Número de personas que llegan entre las 2:30 y el siguiente bus.
   - $N$= Número de pasajeros que suben al siguiente bus después de las 2.30.

   Entonces:

$$P(N_1 = j) = \frac{\lambda\mu^j}{(\lambda+\mu)^{j+1}}$$

$$P(N_2 = j) = \frac{\lambda\mu^j}{(\lambda+\mu)^{j+1}}$$

   De esta forma se tiene que:

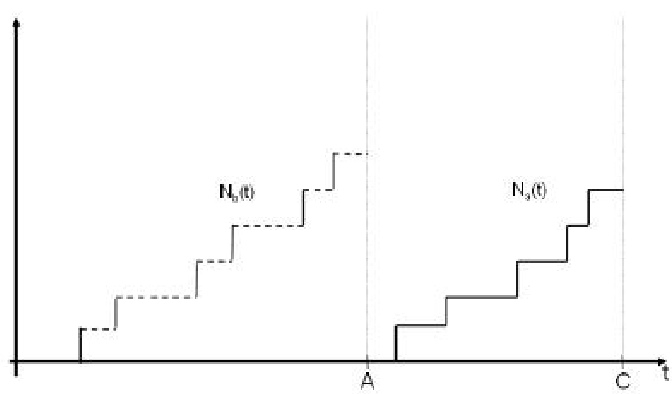
$$\begin{aligned} P(N_m = n) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda\mu^k}{(\lambda+\mu)^k} \cdot \frac{\lambda\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^{n-k}} \\ P(N_m = n) &= (n+1)\frac{\lambda^2\mu^n}{(\lambda+\mu)^{n+2}} \end{aligned}$$

6. Basta con evaluar la expresión anterior en $(n-1)$, dado que se asegura que llegó un pasajero a las 2:30.

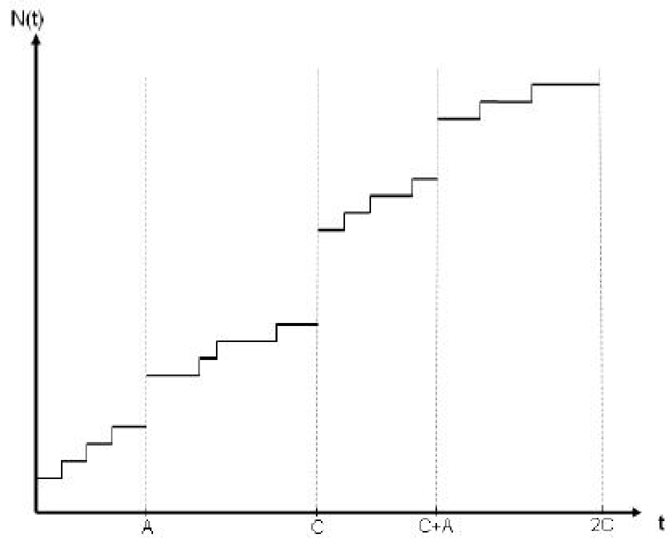
$$P(N_m = n) = (n)\frac{\lambda^2\mu^{n-1}}{(\lambda+\mu)^{n+1}}$$

## Problema 2

*a*) (1,0 ptos) Sean $\{N_a(t) : t \geq 0\}$, $\{N_b(t) : t \geq 0\}$ y $\{N_T(t) : t \geq 0\}$ los procesos de conteo asociados al número de autos que cruzan la calle a, la calle b y ambas, respectivamente. El diagrama de autos que cruzan la intersección (por una calle en particular) es la que se muestra en la figura a continuación:



Entonces la dinámica del total de autos que cruza por alguna de las calles es la siguiente:




Para calcular la distribución de los autos que cruzan la intersección en un ciclo hay que notar que, dada la definición del ciclo, cruzaran todos los autos que llegan por la calle a durante un tiempo C y todos los que llegan por la calle b en el mismo tiempo. Entonces $N_a(C)$sigue un proceso de poisson de tasa $\lambda_a$, y $N_b(C)$ sigue un proceso de Poisson de tasa $\lambda_b$. Por suma de procesos de Poisson es directo que $N_T(C)$ sigue un proceso de Poisson de tasa $(\lambda_a + \lambda_b)$. Es importante notar que solo para intervalos de largo C se cumple esta propiedad (dado que solo en esos instantes han cruzado todos los autos que han llegado al cruce).

*b*) (1,0 ptos) Cada uno de los autos que cruzó el ciclo (dada la respuesta a la pregunta (a)) tiene una probabilidad $\frac{\lambda_a}{\lambda_a+\lambda_b}$ de haber cruzado por la calle a. Para ver esto sólo basta pensar en que la llegada de autos por la calle a viene de la división del proceso de Poisson $N_T(C)$ (de tasa $\lambda_a + \lambda_b$) con probabilidad $\frac{\lambda_a}{\lambda_a+\lambda_b}$ (si multiplican la tasa y la prob. recuperan el proceso original). Entonces, dado que llegaron n tendre que:

$$P[N_a(C) = k|N_T(C) = n] = \binom{n}{k}(\frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b})^k \cdot (\frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b})^{n-k}$$

Es decir una distribución binomial de parámetros $n$ y $(\frac{\lambda_a}{\lambda_a+\lambda_b})$.

*c*) (1,0 ptos) Veamos esto como un proceso de Poisson filtrado. Si un auto llega (por a) en el instante s (medido desde el comienzo del ciclo) tiene la siguiente probabilidad de haber esperado para cruzar:

$$P[s] = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq s < A \\ 1 & si \quad A \leq s < C \end{cases}$$

Entonces independiente del instante de llegada, cada uno de estos $N$ autos tiene una probabilidad $p$ de haber tenido que esperar, donde:

$$p = \int_0^C \frac{P[s]}{C} ds = \int_0^A \frac{0}{C} ds + \int_A^C \frac{1}{C} ds = 1 - \frac{A}{C}$$

Donde se utilizo la distribución uniforme [0,C] de las llegadas condicionadas de un proceso de Poisson. Sea $N(t)_{Ea}$ el número de autos que ha cruzado hasta t pero que ha debido esperar la luz verde. Entonces tendremos que:

$$P[N(C)_{Ea} = k|N_a(C) = n] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Es decir una distribución binomial de parámetros $n$ y $p$.

*d*) (1,0 ptos) Sea $N_{NE}(t)$ el número de autos que ha cruzado hasta t y que no espera luz verde para cruzar. Nuevamente veamos el cuento como un proceso de Poisson filtrado (en particular será muy parecido a lo que hicimos en la clase auxiliar).
Si un auto llega en el instante s (medido desde el comienzo del ciclo) tiene la siguiente probabilidad de cruzar inmediatamente.

$$P[s] = \begin{cases} \frac{\lambda_a}{\lambda_a+\lambda_b} & si \quad 0 \leq s < A \quad \text{(la probabilidad de llegar por a)} \\ \frac{\lambda_b}{\lambda_a+\lambda_b} & si \quad A \leq s < C \quad \text{(la probabilidad de llegar por b)} \end{cases}$$

Noten que estamos filtrando $N_T(C)$.
Entonces tendremos que la prob. descondicionada del instante de llegada será:

$$p = \int_0^C \frac{P[s]}{C} ds = \int_0^A \frac{1}{C} \cdot \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} ds + \int_A^C \frac{1}{C} \cdot \frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} ds = \frac{[\lambda_a \cdot A + \lambda_b \cdot (C - A)]}{C \cdot \lambda_a + \lambda_b}$$

Entonces tendremos que:

$$P[N(C)_{NE} = k | N_T(C) = n] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Es decir una distribución binomial de parámetros $n$ y $p$.

*e*) (2,0 ptos) Es fácil ver que el costo total tiene sólo 2 componentes, una asociada a los autos que vienen por a y esperan, y la otra asociada a los autos que vienen por b y esperan.
Entonces (dado que en un ciclo la distribución de los autos que vienen por a y esperan es Poisson de tasa $\lambda_a \cdot B$ y que de la misma forma, la distribución de los autos que vienen por b y esperan es Poisson de tasa $\lambda_b \cdot A$) tendremos que:

$$\begin{aligned} E[\text{Costo ciclo}] &= E[\text{Autos por a}] + E[\text{Autos por b}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[\text{Autos por a}|N_a(B) = n] \cdot P[N_a(B) = n] \\ &\qquad + \sum_{n=0}^{\infty} E[\text{Autos por b}|N_b(A) = n] \cdot P[N_b(A) = n] \end{aligned}$$

Ahora, si un auto que llega por a, lo hace a s unidades de tiempo desde que se comenzó la luz roja, incurrirá en un costo igual a $M \cdot (B - s)$. Sin embargo dada la distribución uniforme de los tiempos de llegada de un Poisson uniforme, tendremos que este costo $C$ será:

$$C = \int_0^B \frac{M \cdot (B - s)}{B} ds = \frac{M \cdot B}{2}$$

Es fácil ver que:

$$E[\text{Autos por a}|N_a(B) = n] = n \cdot \frac{M \cdot B}{2}$$

La misma lógica entrega el siguiente resultado para la calle b:

$$E[\text{Autos por a}|N_a(B) = n] = n \cdot \frac{M \cdot A^2}{3}$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
E[\text{Costo ciclo}] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[\text{Autos por a}|N_a(B)=n]\cdot P[N_a(B)=n] \\
&\qquad\qquad\qquad + \sum_{n=0}^{\infty} E[\text{Autos por b}|N_b(A)=n]\cdot P[N_b(A)=n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}[n\cdot\frac{M\cdot B}{2}]\cdot P[N_a(B)=n] + \sum_{n=0}^{\infty}[n\cdot\frac{M\cdot A^2}{3}]\cdot P[N_b(A)=n] \\
&= \frac{\lambda_a\cdot M\cdot B^2}{2} + \frac{\lambda_b\cdot M\cdot A^3}{3}
\end{aligned}
$$

## Problema 3

Empezamos con un par de definiciones:

$N(T) =$ incendios ocurridos hasta el instante t, independiente de su tipo. (Poisson($\lambda$))
$N_P(T) =$ incendios pequeños ocurridos hasta el instante t. (Poisson($\lambda p$))
$N_G(T) =$ incendios grandes ocurridos hasta el instante t. (Poisson($\lambda(1-p)$))

*a*) Simplemente debemos calcular la probabilidad de que ocurran más de $n-m$ incendios en lo que queda del año. Esto es:

$$P[N(\frac{1}{2}) > n-m] = \sum_{k=n-m+1}^{\infty} \frac{\frac{\lambda}{2}^k \cdot e^{-\frac{\lambda}{2}}}{k!}$$

*b*) Sin usar el clásico truco de la binomial el desarrollo es el siguiente ($k \in \{1,...,15\}$):

$$
\begin{aligned}
P[N_G(1)=k|N(1)=15] &= \frac{P[N_G(1)=k \wedge N(1)=15]}{P[N(1)=15]} \\
&= \frac{P[N_G(1)=k]\cdot P[N_P(1)=15-k]}{\frac{\lambda^{15}\cdot e^{-\lambda}}{15!}} \\
&= \frac{\frac{(\lambda(1-p))^k\cdot e^{-\lambda(1-p}}{k!}\cdot\frac{(\lambda p)^{15-k}\cdot e^{-(\lambda p)}}{(15-k)!}}{\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{15!}} \\
&= \binom{15}{k}(1-p)^k\cdot p^{15-k}
\end{aligned}
$$

*c*) La probabilidad de que el cuerpo de bomberos no sea requerido por un incendio grande es:

$$P[\text{No requierido}] = P[N_G(\frac{1}{52}=0)] = e^{-\lambda(1-p)\frac{1}{52}}$$

Por lo tanto la probabilidad de ser requerido por uno o más incendios grandes es $1-e^{-\lambda(1-p)\frac{1}{52}}$

*d*) Notamos que los daños anuales son la suma de los daños producidos por incendios grandes e incendios pequeños. Dado que tanto los procesos como las variables aleatorias asociadas a los daños son independientes podemos calcular el daño esperado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
E[\text{Daños}] &= E[\text{Daños incendios grandes}] + E[\text{Daños incendios pequeños}]\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E[\text{Daños incendios grandes}|N_P(1)=k]\cdot \frac{(\lambda(1-p))^k e^{-\lambda(1-p)}}{k!}\\
&\quad +\sum_{k=0}^{\infty} E[\text{Daños incendios perqueños}|N_P(1)=k]\cdot \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}
\end{aligned}$$

Pero

$$E[\text{Daños incendios perqueños}|N_G(1)=k] = \sum_{i=0}^{k} W_i = k\cdot\mu$$

y

$$E[\text{Daños incendios grandes}|N_P(1)=k] = \sum_{i=0}^{k} Y_i = k\cdot\gamma$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
E[\text{Daños}] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\gamma\cdot\frac{(\lambda(1-p))^k e^{-\lambda(1-p)}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\mu\cdot\frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}\\
&= \gamma\cdot E[Poisson(\lambda(1-p)] + \mu\cdot E[Poisson(\lambda p]\\
&= \gamma\cdot\lambda(1-p) + \mu\cdot\lambda p
\end{aligned}$$

*e*) Utilizaremos la siguiente identidad valida para cualquier proceso de conteo:

$$R(t)\geq n \Leftrightarrow S_n \leq t$$

Donde (en este caso) $S_n$ es el tiempo en que ocurre el n-ésimo incendio al cual acude el cuerpo de bomberos. Entonces:

$$P[R(t)\geq n] = P[S_n\leq t]$$

Sin embargo $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_i + \sum_{k=1}^{n-1} B_i$
Donde las variables $X_i$ representan variables aleatorias i.i.d exponenciales de parámetro $\lambda$ (dado que se refieren al tiempo entre el termino del trabajo sobre el i-1-ésimo incendio atendido y la ocurrencia del i-ésimo atendido) y las variables $b_i$ son variables aleatorias i.i.d exponenciales de pa'rametro $\beta$ ( dado que se refieren al tiempo de trabajo sobre el i-ésimo incendio sofocado. notando que $a = \sum_{k=1}^{n} X_i \rightarrow \gamma(n,\lambda)$ y que $b = \sum_{k=1}^{n-1} B_i \rightarrow \gamma(n-1,\beta)$ tendremos que:

$$\begin{aligned}
P[R(t)\geq n] &= P[S_n\leq t]\\
&= P[a+b\leq t]\\
&= P[a\leq t-b]\\
&= \int_o^{\infty} P[a\leq t-s]\cdot\frac{\beta^{n-1}s^{n-2}e^{-\beta s}}{(n-2)!}ds\\
&= \int_o^{t} P[a\leq t-s]\cdot\frac{\beta^{n-1}s^{n-2}e^{-\beta s}}{(n-2)!}ds\\
&= \int_o^{t}\int_0^{t-s} \frac{\lambda^n h^{n-1}e^{-\lambda h}}{(n-1)!}\cdot\frac{\beta^{n-1}s^{n-2}e^{-\beta s}}{(n-2)!}\cdot dh\cdot ds
\end{aligned}$$

Dudas, consultas y comentarios a
dyung@ing.uchile.cl