Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: P. Rey, D. Sauré, R. Epstein.
Aux : C. Berner, M. Guajardo, A. Neely, D. Yung

Clase Auxiliar 26 de Abril, 2005

Procesos de Poisson

Problema 1

Partiendo en $t = 0$, los buses llegan a un paradero según un proceso de poisson de tasa λ. Por su parte, lo pasajeros llegan a esperar al paradero según un proceso de poisson de tasa μ. Al llegar el bus, todos los pasajeros que se encuentren esperando se suben instantáneamente a él (i.e. capacidad del bus es infinita), y los pasajeros que llegan posteriormente a esperar se suben al siguiente bus.

1. Encuentre la función de probabilidad del número de pasajeros que entran al m-ésimo bus, dado que el tiempo entre las llegadas del bus $m - 1$ y del bus m-ésimo es t.
2. Encuentre la función de probabilidad del número de pasajeros que se suben al m-ésimo bus.
3. Dado que un bus llega a las 10:30 AM y no llegan buses entre las 10:30 y las 11:00 AM, encuentre la función de probabilidad del número de pasajeros que se suben al siguiente bus.
4. Encuentre la función de probabilidad del número de pasajeros esperando en algún momento cualquiera del tiempo, por ejemplo, 2 : 30 PM. Suponga que el proceso empezó *hace mucho* tiempo.
5. Encuentre la función de probabilidad del número de pasajeros que se suben al siguiente bus (que pasa después de las 2:30 PM).
6. Dado que Ud. llega a esperar el bus a las 2:30 PM, encuentre la función de probabilidad del número de pasajeros que se suben al siguiente bus.

Problema 2

Suponga que la intersección de dos calles unidireccionales, que llamaremos a y b, está regulado por un semáforo, tal como se ilustra en la figura. El semáforo funciona en un ciclo de C unidades de tiempo, de las cuales un tiempo A corresponde a luz verde para la calle a y un tiempo B verde para la calle b (sólo hay luces verdes y rojas).

Por la calle a llegan autos según un proceso de Poisson de tasa $\lambda_a[\frac{\text{autos}}{u.t.}]$, mientras que por la calle b llegan autos según un Proceso de Poisson de tasa $\lambda_b[\frac{\text{autos}}{u.t.}]$. Los autos que llegan a la intersección y encuentran la luz en verde cruzan inmediatamente, pero si encuentran el semáforo en rojo deben esperar hasta el próximo cambio de luz, momento en que cruzan instantáneamente la intersección (el tiempo que demoran en cruzar es despreciable).

Si ambas calles son lo suficientemente anchas como para que no se formen colas y no está permitido que los vehículos doblen en este cruce, conteste las siguientes preguntas:

1. (1,0 ptos) Realice un diagrama que muestre el número de automóviles esperando cruzar la intersección en una de las dos calles (por ejemplo la calle a) en función del tiempo y otro que muestre el número total de automóviles que han cruzado la intersección en función del tiempo. ¿Cuál es la distribución de probabilidad para el número de autos que cruzan la intersección en 1 ciclo del semáforo? HINT: Considere que un ciclo comienza cuando da la luz roja para alguna calle y termina cuando termina la

luz verde inmediatamente posterior para esa misma calle, considerando en "algún momento" la entrada de los vehículos que han tenido que esperar por luz roja (para ambas calles).

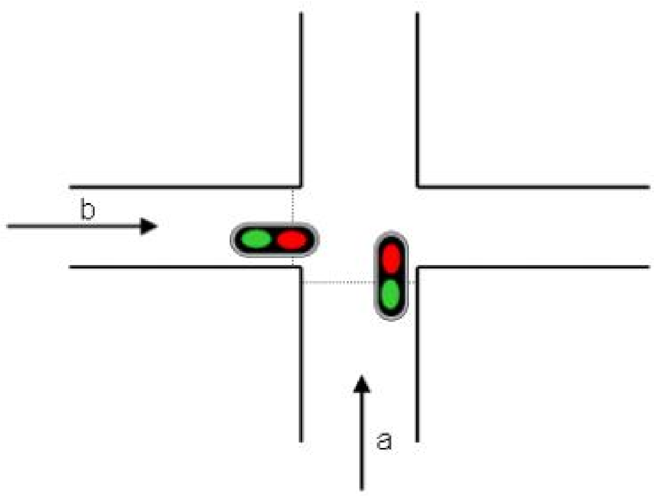
2. (1,0 ptos) Si en un ciclo cruzaron en total N autos por la intersección, ¿Cuál es la distribución de probabilidad para el número de autos que cruzaron por la calle a?

3. (1,0 ptos) Si en un ciclo cruzaron la intersección N_a autos por la calle a, ¿Cuál es la distribución de probabilidad del número de autos que tuvo que esperar por cruzar (por la calle a)?

4. (1,0 ptos) Si en un ciclo cruzaron en total n autos por la intersección, ¿Cuál es la distribución de probabilidad para el número de autos que NO tuvo que esperar por cruzar?

Suponga ahora que los automovilistas que circulan por la calle a perciben un costo igual a $\$M \cdot t$, donde t es el tiempo que deben esperar antes de poder cruzar, mientras que para los automovilistas que circulan por la calle b este costo queda bien modelado por la expresión $\$M \cdot t^2$

5. (2,0 ptos) Calcule el costo esperado incurrido por los automovilistas que esperan en un ciclo del semáforo. HINT: Puede ser útil calcular la esperanza del tiempo que debe permanecer un automovilista frente a la luz roja, condicional a que llega cuando la luz está roja.



Problema 3, CTP 4 Otoño 2003

Los incendios de un bosque del sur de Chile ocurren según un proceso de Poisson de tasa λ [incendios/año]. Independiente de todo lo demás con probabilidad p un incendio sucede en un lugar de fácil acceso para el cuerpo de bomberos y por lo tanto será un incendio pequeño. Por otro lado con probabilidad $1-p$ un incendio ocurre en un lugar de difícil acceso y por lo tanto será un incendio grande.

1. (1,0 pto.) Hasta la mitad del año se han contabilizado m incendios (independiente de su tipo), y el promedio histórico de incendios anuales es n con $n > m$. ¿Cuál es la probabilidad que este año se supere el promedio histórico?.

2. (1,0 pto.) Dado que en un año ocurrieron 15 incendios, ¿Cuál es la probabilidad de que k de ellos hayan sido incendios grandes?.

3. (1,0 pto.) La compañia de bomberos de la zona debe acudir a una emergencia lejana al bosque, por lo cual no estará disponible por una semana. ¿Cuál es la probabilidad de que durante esa semana el

cuerpo de bomberos sea requerido por uno o más incendios grandes? (suponga que el año tiene 52 semanas).

4. (1,5 ptos.) Se sabe que el i-ésimo incendio pequeño ocurrido destruye W_i hectáreas de bosque, donde W_i representa una variable aleatoria de media μ_i (W_i i.i.d.). Por su parte el i-ésimo incendio grande destruye Y_i hectáreas de bosque, donde Y_i representa una variable aleatoria de media γ_i (Y_i i.i.d.). ¿Cuál es el valor esperado de las hectáreas de bosque destruidas en un año?.

5. (1,5 ptos.) Suponga que los bomberos demoran un tiempo aleatorio en apagar un incendio (independiente de su tipo) distribuido según una exponencial de media $[1/\beta]$ años (es decir de parámetro β). Suponiendo que los bomberos no asisten a incendios que han sido declarados mientras ellos se encuentran trabajando, calcule $P[R(t) \geq n]$ donde $R(t)$ representa el número de incendios a los que han asistido hasta el instante t, definido para todo natural $n > 1$.