Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: P. Rey, D. Sauré, R. Epstein.
Aux : C. Berner, M. Guajardo, A. Neely, D. Yung

Clase Auxiliar 20 de Abril, 2005

Procesos de Poisson

Problema 1

1. Para que esto ocurra el tiempo entre cada uno de los 6 últimos 6 goles debe ser superior a B (notar que la probabilidad de ver el primer gol es 1). Sean x_i = tiempo entre el gol (i-1)-ésimo y el i-ésimo. Entonces:

$$P(verlos7primerosgoles) = P(x_2 > B, x_3 > B, ..., x_6 > B, x_7 > B) = (e^{-\lambda B})^6 = e^{-6\lambda B}$$

2. Sea Y_i el tiempo trascurrido entre el fin de la celebración del (i-1)-ésimo gol observado y el momento en que se produce el i-ésimo gol observado. De esta manera tenemos que:

   - $Y_1 \rightarrow exp(\lambda)$
   - $Y_i \rightarrow exp(\lambda)\ \forall i \neq 1$

   Entonces sea S_N el tiempo en que vemos el N-ésimo gol.

$$S_n = \sum_{i=1}^{N} Y_i + (N-1)B \Rightarrow S_N - (N-1)B \rightarrow Gamma(N, \lambda)$$

   De lo anterior, y sabiendo que $P(S_N \leq t) = P(R(T) \geq N)$[1] se concluye que:

$$P(R(T) \geq N) = \int_0^{t-(n-1)B} \frac{\lambda^N \cdot t^{N-1} \cdot e^{-\lambda t} \partial t}{(n-1)!}$$

Problema 2

<u>División de procesos de Poisson:</u>

$N(t)$ = Número total de votantes que llegan hasta tiempo t
$N_A(t)$ = Número total de votantes que llegan hasta tiempo t y votan por candidato A
$N_B(t)$ = Número total de votantes que llegan hasta tiempo t y votan por candidato B
p = Probabilidad que un votante elija al candidato A

[1] Identidad valida para cualquier proceso de conteo

$$
\begin{aligned}
P[N_A(t)=n] &= \sum_{k=0}^{\infty} P[N_A(t)=n\,/\,N(t)=k]\cdot P[N(t)=k] \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} P[N_A(t)=n\,/\,N(t)=k]\cdot P[N(t)=k] \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!n!}p^n\cdot(1-p)^{k-n}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \\
&= \frac{+^n e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}\underbrace{\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\Big((1-p)\lambda t\Big)^{k-n}}{(k-n)!}}_{e^{(1-p)\lambda t}} \\
&= \frac{e^{-\lambda pt}(\lambda pt)^n}{n!} \rightsquigarrow \text{Poisson}(\lambda p)
\end{aligned}
$$

<u>Distribución condicional de los tiempos de llegada:</u>

X_1 = Tiempo en que se produce la primera llegada, condicional a que de $[0,\, t]$ hay una llegada

$$
\begin{aligned}
P[X_1 \le s/\,N(t)=1) &= \frac{P[X_1\le s\,\wedge\,N(t)=1]}{P[N(t)=1]} \qquad 0\le s\le t \\
&= \frac{e^{-\lambda s}\lambda s e^{-\lambda(t-s)}}{e^{-\lambda t}\lambda t} = \frac{s}{t}
\end{aligned}
$$

Luego, condicional a que hay una llegada en el intervalo $[0,\, t]$ el tiempo en que esta ocurre sigue una distribución $U[0,\, t]$.

1. **Alternativa 1:**

$$
\begin{aligned}
P[N_A(10)=n\,/\,N(10)=1000] &= \frac{P[N_A(10)=n\,\wedge\,N(10)=1000]}{P[N(10)=1000]} \\
&= \frac{P[N_A(10)=n]\cdot P[N_B(10)=1000-n]}{P[N(10)=1000]} \\
&= \frac{\frac{e^{-\lambda_A\cdot 10}(\lambda_A\cdot 10)^n}{n!}\cdot\frac{e^{-\lambda_B\cdot 10}(\lambda_B\cdot 10)^{1000-n}}{(1000-n)!}}{\frac{e^{-\lambda\cdot 10}(\lambda\cdot 10)^1000}{1000!}} \\
&= \frac{1000!}{(1000-n)!n!}\cdot\left(\frac{\lambda_A}{\lambda}\right)^n\left(\frac{\lambda_B}{\lambda}\right)^{1000-n} \\
&= \frac{1000!}{(1000-n)!n!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1000} \qquad n\ge 0
\end{aligned}
$$

Alternativa 2:

Pensar directamente en una binomial. Si la probabilidad que c/u de los 1000 que llegaron, independiente de los demás, vote por el candidato A es p, tenemos que:

$$
P[N_A(10)=n\,/\,N(10)=1000] = \frac{1000!}{(1000-n)!n!}\cdot p^n(1-p)^{1000-n} = \frac{1000!}{(1000-n)!n!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1000} \qquad n\ge 0
$$

2. Llamemos N_A^4 al número de votantes del candidato A que llegan en las primeras 4 horas de votación.

Alternativa 1:

$$\begin{aligned}
P[N_A^4 = n \,/\, N(10) = 1000] &= \frac{P[N_A(4) = n \wedge N(6) + N_B(4) = 1000 - n]}{P[N(10) = 1000]} \\
&= \frac{P[N_A(4) = n] \cdot P[N^\star(6) = 1000 - n]}{P[N(10) = 1000]} \\
\text{Donde } N^\star &\rightsquigarrow \text{Poisson de tasa } \frac{4}{3}\lambda \\
&= \frac{\frac{(2\lambda)^n \cdot e^{-2\lambda}}{n!} \cdot \frac{(8\lambda)^{1000-n} \cdot e^{-8\lambda}}{(1000-n)!}}{\frac{(10\lambda)^{1000} \cdot e^{-10\lambda}}{1000!}} \\
&= \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \cdot \left(\frac{2}{8}\right)^n \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^{1000} \\
&= \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{1000-n}
\end{aligned}$$

Notar que si se consideran 2 procesos independientes $N_1(t) \rightsquigarrow \text{Poisson}(\lambda)$ y $N_2(t) \rightsquigarrow \text{Poisson}(\frac{\lambda}{q})$ se tendrá que $P[N_1(t) = k] = P[N_2(qt) = k]$, por lo que es posible ajustar "el reloj" del proceso $N_B(4)$ para sumarlo con $N(6)$.

Alternativa 2:

La probabilidad que una persona llegue en las primeras 4 horas y vote por el candidato A, dado que llegó en las primeras 10 será $p = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$. Con esto se tiene que

$$P[N_A^4 = n \,/\, N(t) = 1000] = \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \left(\frac{1}{5}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^{1000-n}$$

3. Los votantes llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ, por lo que si T es el tiempo en que llega el primer votante se tendrá:

$$P[T > t] = P[N(t) = 0] = e^{-\lambda t} \quad \text{Por lo que } T \rightsquigarrow exp(\lambda)$$

De la misma manera, el tiempo T_A hasta que llega el primer votante tipo A sigue una exponencial de parámetro $\frac{\lambda}{2}$.

4. Llamaremos $P[N_B^n]$ a la probabilidad que lleguen n votantes para el candidato B antes del primero para A y T_A al instante en que llega el primer votante para el candidado A.

Alternativa 1:

$$P[N_B^n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Alternativa 2:

$$\begin{aligned}
P[N_B^n] &= \int_0^\infty P[N_B^n \,/\, T_A = t] f_{T_A}(t) dt \\
&= \int_0^\infty \frac{(\lambda_B t)^n e^{-\lambda_B t}}{n!} \cdot \lambda_A e^{-\lambda_A t} dt \\
&= \int_0^\infty \frac{\left(\frac{\lambda}{2} t\right)^n e^{-\frac{\lambda}{2} t}}{n!} \cdot \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda}{2} t} dt \\
&= \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{n+1}}{\lambda^{n+1}} \int_0^\infty \frac{t^n \lambda^{n+1} e^{-\lambda t}}{n!} dt = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Problema 3

1. Dado que el proceso es poissoniano $\Rightarrow$ Tiempo entre llegadas $\rightarrow exp(\lambda)$.
   Por lo tanto:

$$P_s(\text{caminar}) = \int_s^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \partial t = e^{-\lambda s}$$

2. Hay que distinguir dos casos:
   - Si el bus pasa en t, con $t \leq s$, me demoro t+R en llegar a casa.
   - Si el bus pasa en t, con $t > s$, me demoro s+W en llegar a casa.

3. Para calcular esta esperanza condicionaremos sobre t, el instante de llegada del bus.

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_0^{\infty} E(T|t) \cdot \lambda e^{-\lambda t} \partial t \\ E(T) &= \int_0^{s} (t+R) \cdot \lambda e^{-\lambda t} \partial t + \int_s^{\infty} (S+W) \cdot \lambda e^{-\lambda t} \partial t \end{aligned}$$

   Desarrollando deberían llegar a la siguiente expresión:

$$E(T) = R + \frac{1}{\lambda} + e^{-\lambda s}(W - R - \frac{1}{\lambda})$$

4. Claramente si:
   - $W - R - \frac{1}{\lambda} > 0$, entonces E(T) se minimiza en s= ∞
   - $W - R - \frac{1}{\lambda} < 0$, entonces E(T) se minimiza en s=0
   - $W - R - \frac{1}{\lambda} = 0$, entonces la expresión no depende de s.

5. Dada la pérdida de memoria de la exponencial, si espero un s>0 y cada vez que pasa ese tiempo reevalúo mi desición estaré siempre frente al mismo problema original por lo que mi s será el mismo $\Rightarrow$ si s>0, entonces s=∞.

Dudas, consultas y comentarios a
dyung@ing.uchile.cl