Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey, D. Sauré
Aux: C.Berner, M.Guajardo, A.Neely, D.Yung

Solución Clase Auxilliar 13 Abril de 2005

Repaso Control 1

Problema 1

1. Supondremos que $P_2 < C_1$ (si no la decisión es trivial), con lo que solo analizamos el caso $X < D$. Si la demanda t es menor a la cantidad ordenada X, las utilidades toman la siguiente forma:

$$Utilidad = t \cdot P_1 - X \cdot C_1 + (X - t) \cdot P_2$$

2. Si la demanda t es mayor a la cantidad ordenada X, las utilidades toman la siguiente forma:

$$Ganancia = X \cdot P_1 - (t - X) \cdot C_2 - X \cdot C_1$$

3. Para obtener la ganancia diaria esperada simplemente integramos la función de utilidad condicionada sobre todo el dominio de función la demanda ponderando por la densidad de probabilidad. Esto es:

$$\begin{aligned}
E[\text{Utilidad}] &= \int_0^D E[\text{Utilidad } |t] \cdot \frac{dt}{D} \\
&= \int_0^X E[\text{Utilidad } |t] \cdot \frac{dt}{D} + \int_X^D E[\text{Utilidad } |t] \cdot \frac{dt}{D} \\
&= \int_0^X [t \cdot P_1 - C_1 \cdot X + (X - t) \cdot P_2] \cdot \frac{dt}{D} + \int_X^D [X \cdot P_1 - C_1 \cdot X - (t - X) \cdot C_2] \cdot \frac{dt}{D} \\
&= \frac{X^2}{2D} \cdot P_1 + \frac{X^2}{D} \cdot P_2 - \frac{X^2}{2D} \cdot P_2 + \frac{X \cdot (D - X)}{D} \cdot P_1 - \frac{D}{2} \cdot C_2 + \frac{X^2}{2D} \cdot C_2 \\
&\quad + \frac{X \cdot (D - X)}{D} \cdot C_2 - X \cdot C_1
\end{aligned}$$

4. Derivamos e igualamos a 0.

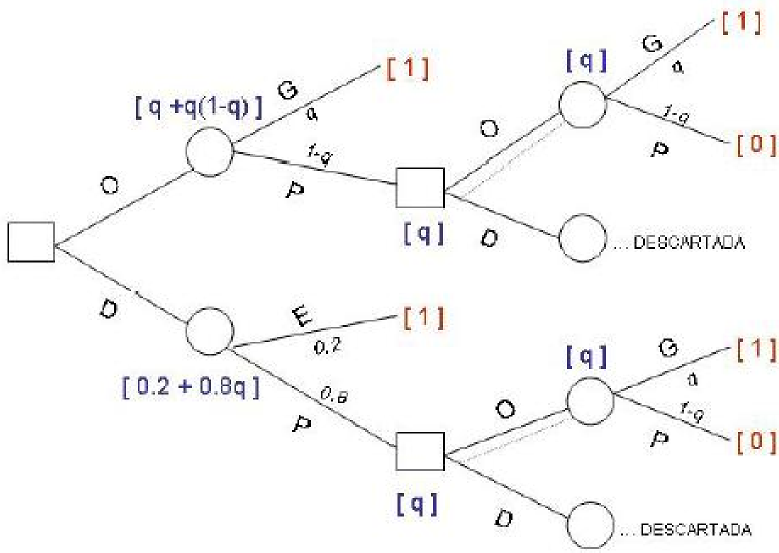
$$\frac{X}{D} \cdot P_1 + P_1 + \frac{X}{D} \cdot P_2 - \frac{2 \cdot X}{D} \cdot P_1 + \frac{X}{D} \cdot C_2 + C_2 - \frac{2X}{D} \cdot C_2 - C_1 = 0$$

Entonces, despejando:

$$X = D \cdot (1 + \frac{-C_1 + P_2}{P_1 - P_2 + C_2})$$

Problema 2

1. Lo primero es darse cuenta que si hay desempate, podemos descartar la opción jugar a la Defensiva, pues siempre el valor esperado de ganar la copa será menor que el que se obtiene al jugar a la Ofensiva. Luego, el árbol que resuelve el técnico del equipo A es el que se muestra a continuación:



El técnico decidirá jugar el segundo partido (el primero del árbol) a la ofensiva si:

$$q + q \cdot (1 - q) > 0{,}2 + 0{,}8 \cdot q$$
$$q + q \cdot (1 - q) > 0{,}2 + (1 - 0{,}2) \cdot q$$
$$q > 0{,}2$$

Luego, la estrategia óptima es la siguiente:

- Si $q > 0{,}2$, entonces siempre jugar a la Ofensiva
- Si $q < 0{,}2$, entonces jugar segundo partido a la Defensiva, y desempate a la Ofensiva
- Si $q = 0{,}2$, es indiferente jugar segundo partido a la Ofensiva o Defensiva, y el desempate lo juego a la Ofensiva

2. El equipo B tendrá probabilidad 0.4 de ganar la copa si el equipo A tiene probabilidad 0.6 de ganar la copa. Veamos la condición que debe cumplir q para que esto ocurra.

   Si equipo A juega a la defensiva el segundo partido se tendrá:
   $P(\text{A Gane Copa}) = 0{,}2 + 0{,}8 \cdot q = 0{,}6$

   O sea, $q = 0{,}5$

   Pero sabemos que si $q = 0{,}5$ el equipo A jugará a la Ofensiva el segundo partido, por lo que descartamos la condición anterior.

   Luego, para que el equipo B tenga probabilidad 0.4 de ganar la copa, el equipo A debe jugar a la Ofensiva el segundo partido, y la condición será:

   $$\begin{gathered} P(\text{A Gane Copa}) = q + q \cdot (1 - q) = 0{,}6 \\ q^2 - 2 \cdot q + 0{,}6 = 0 \\ q = 0{,}368 \end{gathered}$$

   Nota: La otra raiz (1.6) la descartamos pues sabemos que q es una probabilidad.

3. a). Si $q = 0{,}5$, sabemos que el equipo A jugará a la Ofensiva el segundo partido. Luego, la probabilidad que el equipo A gane la copa será:

   $$\begin{gathered} P(\text{A Gane Copa}) = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}5) \\ P(\text{A Gane Copa}) = 0{,}75 \end{gathered}$$

   Luego,

   $$P(\text{B Gane Copa}) = 0{,}25$$

Problema 3

- **Etapas:** cada una de las semanas del horizonte de evaluación, $t = 1, .., T$

- **Variable de Decisión:**

P_t = Precio a fijar en semana t.

- **Variables de Estado:**

S_t = Stock al inicio de semana t.
A_t = Demanda insatisfecha acumulada al inicio de la semana t.
SP_t = Precio fijado en la semana anterior (t-1).

- **Variable Aleatoria:**

D_t = Demanda en semana t.

$$M_t = \begin{cases} 1 & \text{si multa en t} \ , dado\ P_{t-1} = P^a \\ 0 & \qquad\qquad\quad \sim \end{cases}$$

- **Recurrencias:**

$$S_{t+1} = S_t - (1 - M_t) \cdot D_t$$

$$A_{t+1} = A_t + M_t \cdot D_t$$

$$SP_{t+1} = P_t$$

- **Función de Beneficio:**

  En primer lugar, definimos la siguiente notación:

$$P(D(j,k)) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} q^k (1-q)^{j-k} \cdot D_j(SP_t)$$

- Etapa T+1:

$$V_{T+1}^*(S_{T+1}, A_{T+1}, SP_{T+1}) = V \cdot S_{T+1} - \ K \cdot A_{T+1}$$

- Etapa t genérica:

$$V_t(S_t, A_t, SP_t, P_t) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} P(D(j,k)) \cdot [P_t \cdot (j-k) + 0{,}9 P_t \cdot k + V_{t+1}^*(S_t - j, A_t, P_t)] \text{ ,si } SP_t \in [P^m, P^b] \\ \\ (1 - P_{multa}) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} P(D(j,k)) \cdot [P_t \cdot (j-k) + 0{,}9 P_t \cdot k + V_{t+1}^*(S_t - j, A_t, P_t)] \\ + P_{multa} \cdot \{ -M + \sum_{j=0}^{\infty} D_j(SP_t)[-j \cdot C + V_{t+1}^*(S_t, A_t + j, P_t)]\} \text{ ,si } \mathrm{SP}_t = P^a \end{cases}$$

Donde:

$$V_t^*(S_t, A_t, SP_t) = \max_{P_t \in [P^a, P^m, P^b]} \{V_t(S_t, A_t, SP_t, P_t)\}$$

Así, el beneficio esperado óptimo se obtiene con:

$$V^* = V_1^*(S_1, A_1, SP_1)$$

- **Condiciones de Borde:**

$$S_1 = S$$
$$A_1 = 0$$
$$SP_1 = P^b$$

Dudas y/o errores:
Mario Guajardo
mguajard@ing.uchile.cl