Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

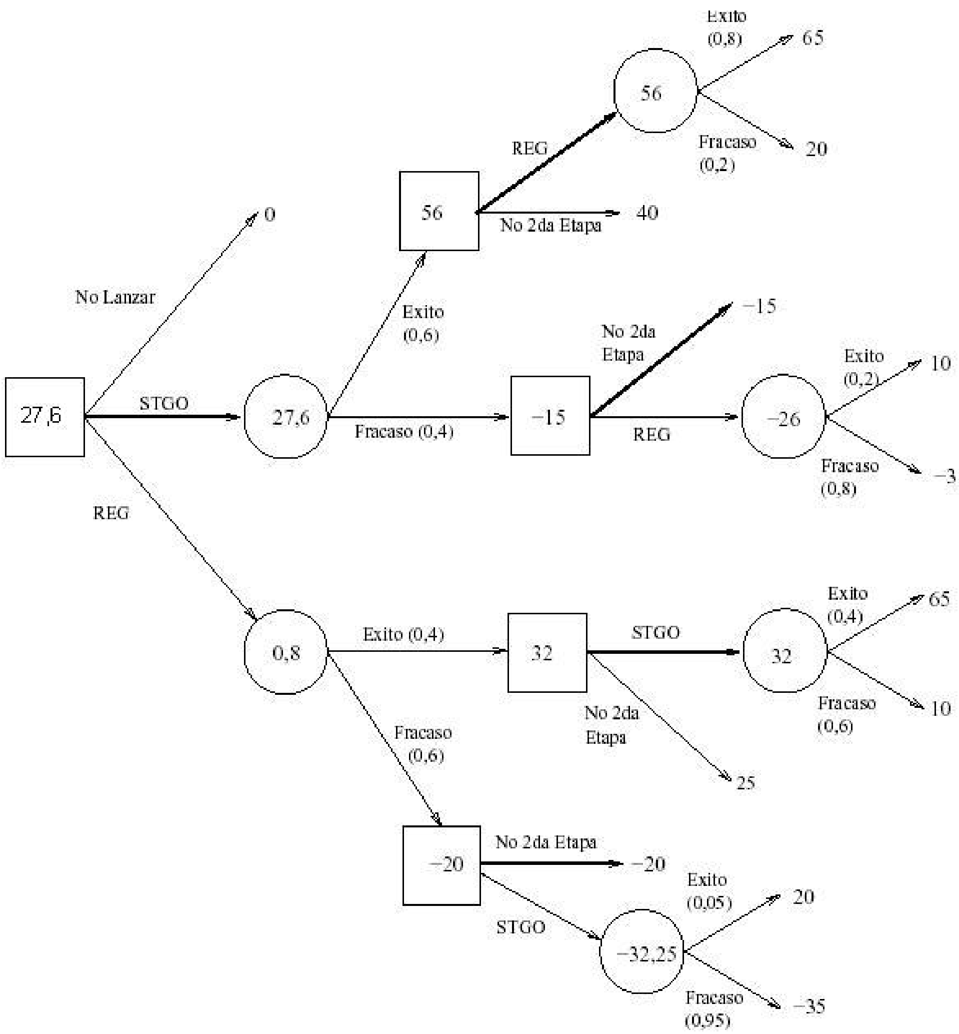
IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey, D. Sauré
Aux: C.Berner, M.Guajardo, A.Neely, D.Yung

Solución Clase Auxilliar 12 Abril de 2005

Repaso Control 1

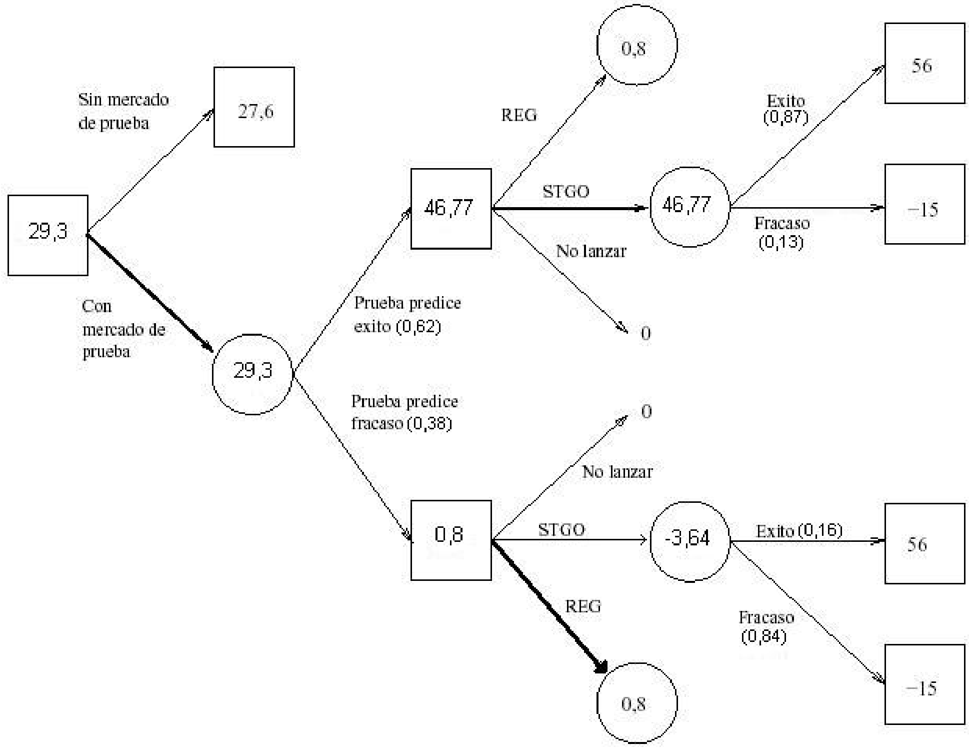
Problema 1

1. El árbol de decisión que resulta es el siguiente:



Del árbol podemos concluir que la política de lanzamiento óptima consiste en:
Primera Etapa: Lanzar el producto en "Santiago".
Segunda Etapa: Si la primera etapa resulta exitosa, lanzar en "Regiones". Si la primera etapa resulta ser un fracaso, no lanzar en "Regiones".

2. El árbol que resulta es el siguiente:



Observación: en las hojas de este árbol que corresponden a nodos de decisión/eventos aleatorios deben ser completados con los subárboles correspondientes del árbol del punto 1.. Estos subárboles son iguales a los del punto 1. ya que la información relevante no cambia.

Para completar este árbol se necesitan calcular algunas probabilidades. Para esto utilizamos la siguiente notación para eventos:

PE := "Mercado de prueba predice éxito en primera etapa en Santiago"
PF := "Mercado de prueba predice fracaso en primera etapa en Santiago"

ES := "Exito en primera etapa en Santiago"
FS := "Fracaso en primera etapa en Santiago"

Las probabilidades necesarias son:

- P(Mercado de prueba predice éxito):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(PE) &= \mathbb{P}(PE|ES) \times \mathbb{P}(ES) + \mathbb{P}(PE|FS) \times \mathbb{P}(FS) \\ &= 0{,}9 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}4 \\ &= 0{,}62 \end{aligned}$$

- P(Exito en primera etapa en Santiago | Mercado de prueba predice éxito):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(ES|PE) &= \frac{\mathbb{P}(PE|ES) \times \mathbb{P}(ES)}{\mathbb{P}(PE)} \\ &= \frac{0{,}9 \times 0{,}6}{0{,}62} \\ &= 0{,}87 \end{aligned}$$

- P(Exito en primera etapa en Santiago | Mercado de prueba predice fracaso):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(ES|PF) &= \frac{\mathbb{P}(PF|ES) \times \mathbb{P}(ES)}{\mathbb{P}(PF)} \\ &= \frac{0{,}1 \times 0{,}6}{0{,}38} \\ &= 0{,}16 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el monto máximo que la compañía está dispuesta a pagar por el lanzamiento reducido es: 29,3 - 27,6 = 1,7 millones de pesos. En particular, si el costo de este lanzamiento es de 5 millones de pesos, no conviene realizarlo.

Problema 2

1. En la Figura 1 es posible apreciar que la ponderación 3 $(1/3 \cdot N1 + 2/3 \cdot N2)$ es la que maximiza la media esperada del control.
2. En este caso se debe separar entre hacer o no el ejercicio y que la media en éste sea azul o rojo. Además se necesitará calcular ciertas probabilidades. Sean:

$$\begin{aligned} Azul &= \text{Media en el ejercicio es azul.} \\ Rojo &= \text{Media en el ejercicio es rojo.} \\ A &= \text{Alumnos tipo A.} \\ B &= \text{Alumnos tipo B.} \end{aligned}$$

Entonces lo que se nos entrega en el enunciado es:

$$\begin{array}{lcclcc} P[A] & = & 0{,}6 & P[B] & = & 0{,}4 \\ P[Azul|A] & = & 0{,}14 & P[Rojo|A] & = & 0{,}86 \\ P[Azul|B] & = & 0{,}42 & P[Rojo|B] & = & 0{,}58 \end{array}$$

Entonces, utilizando probabilidades totales se puede ver que:

$$P[Azul] = P[Azul|A] \cdot P[A] + P[Azul|B] \cdot P[B] = 0{,}252 = 1 - P[Rojo]$$

$$P[Rojo] = 0{,}748$$

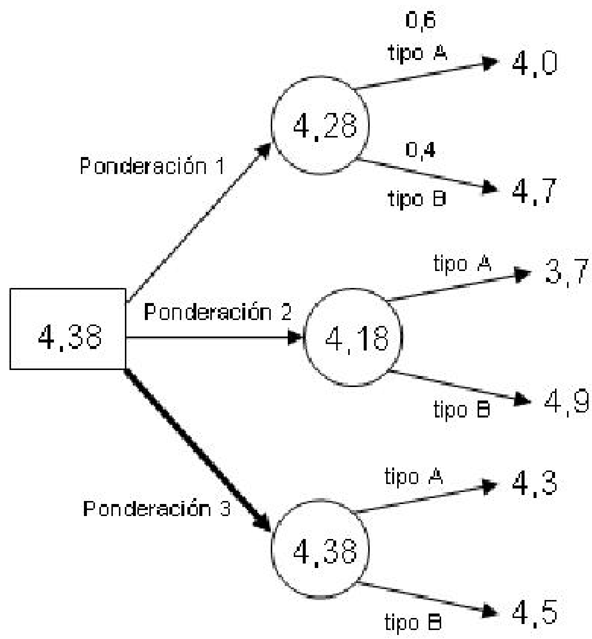


Figura 1: Arbol problema 1.1

Por otro lado tendremos que:

$$P[A|Azul] = \frac{P[Azul|A] \cdot P[A]}{P[Azul]} = \frac{1}{3} = 1 - P[B|Azul]$$

$$P[B|Azul] = \frac{2}{3}$$

$$P[A|Rojo] = \frac{P[Rojo|A] \cdot P[A]}{P[Rojo]} = 0{,}69 = 1 - P[B|Rojo]$$

$$P[B|Rojo] = 0{,}31$$

El árbol resultante, en el cual se utilizan estas probabilidades, se muestra en la Figura 2.

En conclusión, si el ejercicio obtiene una media azul, se debe elegir la ponderación 2 ($2/3 \cdot N1 + 1/3 \cdot N2$), mientras que si la media es un rojo la ponderación que maximiza la media ponderada del control es la tercera ($1/3 \cdot N1 + 2/3 \cdot N2$). Además, claramente conviene tomar el ejercicio ya que con éste la media ponderada del control sube más de dos décimas. De esta forma se puede decir que la ponderación óptima cambia sólo en el caso que la media en el ejercicio sea azul, ya que de lo contrario conviene aplicar la misma ponderación que en la parte 1.

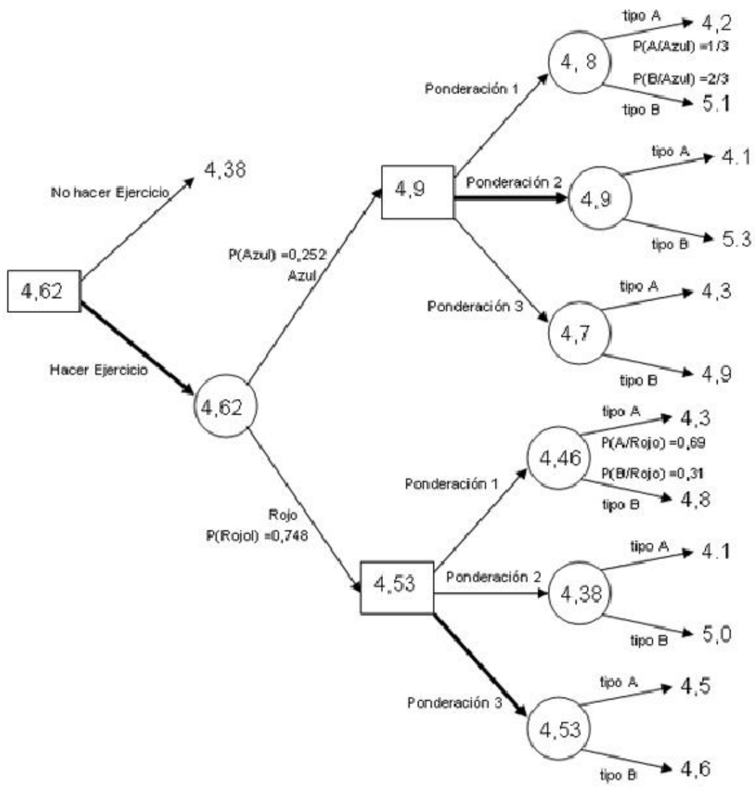


Figura 2: Arbol problema 1.2

Problema 3

1. El modelo queda como sigue:

   - **Etapas de decisión**

     Cada período: $k = 1, 2, \ldots, K$.

   - **Variables de decisión**
     - u_k: cantidad de unidades a pedir en el período k ($u_k \geq 0$, entero);
     - p_k: cantidad de paquetes a armar en el período k ($0 \leq p_k \leq \left\lfloor \dfrac{v_k + u_k}{N} \right\rfloor$, entero).

   - **Variables de estado**
     - v_k: cantidad de unidades en inventario al inicio del período k;
     - q_k: cantidad de paquetes en inventario al inicio del período k.

   - **Variables aleatorias**
     - d_k: demanda en el período k (número de paquetes).

- **Funciones de recurrencia**
  - $v_{k+1} = v_k + u_k - Np_k$;
  - $q_{k+1} = \max\{q_k + p_k - d_k, 0\}$.

- **Funciones de beneficio**

$$\begin{aligned} E(V_k(v_k, q_k, u_k, p_k)) \quad = \quad & -(c_k u_k + I_k v_k + J_k q_k) \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{ik} \cdot \Big[Z \min\{i, q_k + p_k\} \\ & + V_{k+1}^{*}\left(v_k + u_k - Np_k, \max\{q_k + p_k - i, 0\}\right) \Big] . \end{aligned}$$

  donde:

$$V_k^*(v_k, q_k) = \max_{u_k, p_k} \{E(V_k(v_k, q_k, u_k, p_k))\}$$

- **Condiciones de borde**

  $v_1 = q_1 = 0, \quad V_{K+1}^*(v_{K+1}, q_{K+1}) = r \cdot v_{K+1} + R \cdot q_{K+1}$.

2. Las etapas de decisión siguen siendo las mismas. Hay que agregar las siguientes variables:

- **Variables de estado**
  - m_k: unidades que adeuda el fabricante al inicio del período k, por reemplazo de unidades defectuosas enviadas en el período $k-1$.

- **Variables aleatorias**
  - f_k: cantidad de unidades defectuosas en el período k.

  Además hay que modificar las recurrencias y funciones de beneficio de la siguiente manera:

- **Funciones de recurrencia**
  - $v_{k+1} = v_k + (u_k - f_k) + m_k - Np_k$;
  - $m_{k+1} = f_k$.

  Obs. La recurrencia para q_k no se modifica.

- **Funciones de beneficio**

$$\begin{aligned} E(V_k(v_k, q_k, m_k, u_k, p_k)) \quad = \quad & -(c_k u_k + I_k v_k + J_k q_k) \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{u_k} \beta_{ik} \cdot \alpha_{u_k, j} \cdot \Big[Z \min\{i, q_k + p_k\} \\ & + V_{k+1}^{*}\left(v_k + u_k - j + m_k - Np_k, \max\{q_k + p_k - i, 0\}, j\right) \Big] . \end{aligned}$$

  donde:

$$V_k^*(v_k, q_k, m_k) = \max_{u_k, p_k} \{E(V_k(v_k, q_k, m_k, u_k, p_k))\}$$