Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey, D. Sauré
Aux: C.Berner, M.Guajardo, A.Neely, D.Yung

Clase Auxilliar 06 Abril de 2005

Programación Dinámica Estocástica.

Problema 1

1. Consideremos un paradero genérico k. Si el chofer se detiene S se bajaran con seguridad, sin embargo cada una de las $R-S$ personas que están arriba del bus pueden decidir bajarse con probabilidad b_k. Entonces, identificando a cada una de estas personas como una moneda y la probabilidad b_k como la probabilidad de una cara vemos que:

$$P[\text{Se bajen i+S personas}] = \binom{R-S}{i} b_k^i (1-b_k)^{R-S-i} \quad \forall\, i \in \{0,1,...,R-S\}$$

2. Si i personas se bajan ($i \in \{0,1,...,R\}$) entonces quedan $C-R+i$ asientos disponibles en el bus. En el paradero k hay d_k personas que desean subirse. Debido a la capacidad limitada del bus el número de pasajeros que sube es:

$$X(i)^* = \min\{d_k, C-R+i\}$$

Nuevamente, cada uno de estas personas (las que se suben) es escolar con probabilidad q_k. Entonces procediendo como en el punto anterior vemos que:

$$P[\text{Suben j escolares}|\text{Bajan i }] = \binom{X(i)^*}{j} q_k^j (1-q_k)^{X(i)^*-j} \quad \forall\, j \in \{0,...,\min\{d_k, C-R+i\}\}$$

3. Bajo estas condiciones las ganancias por venta de pasajes en el paradero k serán:

$$\begin{aligned}
E[\text{Ventas}] &= \sum_{i=0}^{R-S} E[\text{Ventas}|\text{S + i}]P[\text{Bajan S + i}] \\
&= \sum_{i=0}^{R-S} E[\text{Ventas}|\text{Bajan S + i}]\binom{R-S}{i} b_k^i (1-b_k)^{R-S-i}
\end{aligned}$$

Pero:

$$\begin{aligned}
E[\text{Ventas}|\text{Bajan S + i}] &= \sum_{j=0}^{X(S+i)^*} E[\text{Ventas}|\text{Bajan S + i}|\text{Suben j escolares}]P[\text{Suben j escolares}] \\
&= \sum_{j=0}^{X(S+i)^*} E[\text{Ventas}|\text{Bajan S + i}|\text{Suben j escolares}]\binom{X(S+i)^*}{j} q_k^j (1-q_k)^{X(S+i)^*-j} \\
&= \sum_{j=0}^{X(S+i)^*} [T_E \cdot j + T_A \cdot (X(S+i)^* - j)]\binom{X(S+i)^*}{j} q_k^j (1-q_k)^{X(S+i)^*-j} \\
&= X(S+i)^*[T_E \cdot q_k + T_A \cdot (1-q_k)]
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} E[\text{Ventas}] &= \sum_{i=0}^{R-S} X(S+i)^*[T_E \cdot q_k + T_A \cdot (1-q_k)]\binom{R-S}{i} b_k^i (1-b_k)^{R-S-i} \\ &= \sum_{i=0}^{R-S} \min\{d_k, C-R+S+i\}[T_E \cdot q_k + T_A \cdot (1-q_k)]\binom{R-S}{i} b_k^i (1-b_k)^{R-S-i} \end{aligned}$$

4. Si no se detiene el único costo posible es el asociado a que un carabinero lo pare. Entonces, si supongo que las personas que deseaban bajarse por primera vez en ese paradero no están indignadas (y no reclaman una indemnización):

$$\begin{aligned} E[\text{Costos}] &= E[\text{Costos}|\text{lo detienen}] \cdot r + E[\text{Costos}|\text{no lo detienen}] \cdot (1-r) \\ &= -M \cdot r \end{aligned}$$

5. Seguiremos la metodología tradicional.

   - Etapas:

     Cada uno de los paraderos, $k \in \{1, ..., K\}$.
   - Estados:

     R_k = Número de pasajeros en el bus antes de parar (o no) en el paradero k.

     S_k = Número de pasajeros que deseaban bajarse en el paradero $k-1$.

   - Decisión:

     $X_k = \begin{cases} 1 & \text{sí el chofer decide detenerse en el paradero } k \\ 0 & \sim \end{cases}$
   - Variables aleatorias:

     i_k = Número de personas que desearán bajarse por primera vez en el paradero k.

     j_k = Número de escolares que abordan el bus en el paradero k.

     $l_k = \begin{cases} 1 & \text{sí le sacan una multa en el paradero } k \\ 0 & \sim \end{cases}$
   - Función de beneficio y recurrencias:

     $$P_{k+1} = X_k \cdot \min\{C, P_k - S_k - i_k + d_k\} + (1-X_k) \cdot P_k(1-l_k)$$
     $$S_{k+1} = (S_k + i_k) \cdot (1-l_k) \cdot (1-X_k)$$

   - Función de beneficios:
     Para el último período ideo un paradero imaginario $K+1$ donde la función de costos es el neutro aditivo.
     $$V_{K+1}(P_{K+1}, S_{K+1}) = 0$$

     Para el resto de los paraderos la función de beneficios es la siguiente.

$$V_k^*(P_k, S_k) = \max\{V_k(P_k, S_k, 1), V_k(P_k, S_k, 0)\}$$

Donde:

$$\begin{aligned} V_k((P_k, S_k, 1) &= \sum_{i=0}^{P_k - S_k} [\min\{d_k, C - P_k + S_k + i\}[T_E \cdot q_k + T_A \cdot (1 - q_k)] \\ &\quad + V_{k+1}^*(\min\{C, P_k - S_k - i + d_k\}, 0)] \cdot \binom{P_k - S_k}{i} b_k^i (1 - b_k)^{P_k - S_k - i} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} V_k((P_k, S_k, 0) &= \sum_{i=0}^{P_k - S_k} \Big[r \cdot (-M + V_{k+1}^*(0, 0)) \\ &\qquad + (1 - r) \cdot V_{k+1}^*(P_k, S_{k+1}) \Big] \cdot \binom{P_k - S_k}{i} b_k^i (1 - b_k)^{P_k - S_k - i} \end{aligned}$$

con $S_{k+1} = S_k + i$

- Condiciones de borde:

  $S_1 = 0$ (al comienzo nadie quiere bajar, de hecho el bus esá vacío)

  $P_1 = 0$ (el bus parte vacío)

  $X_K = 1$ (obligatoriamente paro en el último paradero)

Problema 2

1. Está es la clásica pregunta de programación dinámica. La respuesta va por el lado de justificar la existencia de decisiones intertemporales, la existencia de variables de estado que resumen la historia hasta un determinado momento y que la decisión en un período solo depende de ellas y no de la historia, etc.

2. Siguiendo los pasos metodológicos tendremos que:

   - Etapas: Cada una de las T semanas (supondremos que el show final se realiza en una semana ficticia $T + 1$).

   - Variables de Estado:

$$R_t = \text{Número de semanas con rutinas repetidas consecutivamente}$$
$$N_t = \text{Número ocasiones en las cuales se repiten rutinas en la temporada}$$

- Variable de Decisión:

$$X_t = \begin{cases} 1 & \text{Si creo una nueva rutina} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- Variable aleatoria: P_n donde n es el número de semanas consecutivas con repeticiones.
- Recurrencias: Comencemos con el show final (en la semana ficticia $T+1$):

$$V^*_{T+1}(R_{T+1}, N_{T+1}) = q_{N_{T+1}} \cdot m \cdot C(T+1)$$

Para una semana t (supuesto que $p_0 = 0$):

$$V^*_t(R_t, N_t, X_t) = \begin{cases} C(t) + V^*_{t+1}(0, N_t) & \text{Si} \quad X_t = 1 \\ p_{R_t+1} \cdot D(R_t+1) + V^*_{t+1}(R_t+1, N_t+1) & \sim \end{cases} \qquad \forall 0 < t < T+1$$

- Condiciones de borde:

$R_1 = N_1 = 0$

3. Ahora necesitamos guardar información acerca del número de reclamos acumulados en una temporada. El modelo quedará de la siguiente forma:

- Etapas: Cada una de las T semanas (supondremos que el show final se realiza en una semana ficticia $T+1$).

- Variables de Estado:

$$R_t = \text{Número de semanas con rutinas repetidas consecutivamente}$$
$$E_t = \text{Número de ocasiones donde el publico reclamo}$$
$$N_t = \text{Número ocasiones en las cuales se repiten rutinas en la temporada}$$

- Variable de Decisión:

$$X_t = \begin{cases} 1 & \text{Si creo una nueva rutina} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- Variable aleatoria: $P_{\{}n, e\}$ donde n es el número de semanas consecutivas con repeticiones y e es el número de reclamos acumulados.
- Función de beneficio y recurrencias: Comencemos con el show final (en la semana ficticia $T+1$):

$$V^*_{T+1}(R_{T+1}, E_{T+1}, N_{T+1}) = q_{N_{T+1}} \cdot m \cdot C(T+1)$$

Para una semana t:

$$V^*_t(R_t, N_t, X_t) = \begin{cases} C(t) + p_{\{0,E_t\}} \cdot (D(0) + V^*_{t+1}(0, E_t+1, N_t)) & \text{Si} \quad X_t = 1 \\ +(1 - p_{\{0,E_t\}})V^*_{t+1}(0, E_t, N_t)) & \\ & \\ p_{\{R_t+1,E_t\}} \cdot (D(R_t+1) + V^*_{t+1}(R_t+1, E_t+1, N_t+1)) & \sim \\ +(1 - p_{\{R_t+1,E_t\}}) \cdot (V^*_{t+1}(R_t+1, E_t, N_t+1)) & \end{cases}$$

- Condiciones de borde:

$$R_1 = E_1 = N_1 = 0$$

Dudas y/o errores:
Andrés Neely
aneely@ing.uchile.cl