Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey, D. Sauré
Aux: C.Berner, M.Guajardo, A.Neely, D.Yung

Solución CTP 1

15 de Marzo, 2005

1. (a) Sean X_i v.a. exponenciales i.i.d. de parámetro λ, con $i \in \{1, ..., n\}$ Encontrando una expresión equivalente a que el máximo sea menor que t y usando la independencia de las v.a. se tiene que:

$$\begin{aligned} P[X = \text{máx}\{X_1, X_2, ..., X_n\} < t] &= (P[X_1 < t] \cdot P[X_2 < t] ... \cdot P[X_n < t]) \\ &= (1 - e^{-\lambda t})^n \end{aligned}$$

(b) Para encontrar la densidad, simplemente derivamos la función de distribución encontrada en la parte anterior:

$$f_{Max(X_1,...,X_n)}(t) \quad = \quad n(\lambda e^{-\lambda t})(1 - e^{-\lambda t})^{n-1}$$

En lo que sigue, sean T_{pat} el tiempo que la patrulla demora en llegar al cajero y X_i el tiempo al que el $i-$ésimo asaltante llega al cajero.
(c) Esto se obtiene directo de que el tiempo en que la patrulla llega al cajero distribuye según una v.a. exponencial de parámetro μ:
Si $t \geq 0$:

$$P(T_{pat} < t) = \int_0^t \mu e^{-\mu y} dy = 1 - e^{-\mu t}$$

Si $t < 0$ (caso no relevante para el problema), el resultado es cero.

(d) Necesitamos encontrar la probabilidad de que la patrulla demore menos que el último de los asaltantes, i.e., la probabilidad de que una v.a. exponencial de parámetro μ sea menor que el máximo de n v.a. exponenciales i.i.d. de parámetro λ. De las partes anteriores, se concluye que:

$$P[T_{pat} < Max(X_1, ..., X_n)|\text{n secuaces asisten a reunión}] \; = \int_0^\infty (\int_0^t \mu e^{-\mu y} dy) f_{Max(X_1,...,X_n)}(t) dt$$
$$= \int_0^\infty [1 - e^{-\mu t}] \cdot [n(\lambda e^{-\lambda t})(1 - e^{-\lambda t})^{n-1}] dt$$

2. Debemos calcular la probabilidad de que una v.a. exponencial de parámetro μ sea menor que el mínimo de n v.a. exponenciales i.i.d. de parámetro λ, cuya distribución sabemos es una exponencial de parámetro $n\lambda$. Utilizando un resultado conocido:

$$P[T_{pat} < Min(X_1, ..., X_n)|\text{n secuaces asisten a reunión}] \; = \frac{\mu}{\mu + n\lambda}$$

3. Notemos que el número n de secuaces que llega a la reunión distribuye según una binomial de parámetros (n, p).
En esta parte nos piden la utilidad esperada de la patrulla como expresión general. Condicionaremos al número n de secuaces que llegan a la reunión, ponderamos por la probabilidad respectiva, usamos las partes anteriores y sumamos en todo el dominio posible para n:

$$\begin{aligned} E[\text{Utilidades}] &= \sum_{n=1}^{M} E[\text{Utilidades}|\text{llegan n secuaces}] \cdot P(\text{llegan n secuaces}) \\ &= \sum_{n=1}^{M} [P_2 \cdot B + P_1 \cdot R - (1 - P_1) \cdot C] \cdot [\binom{M}{n} p^n (1-p)^{M-n}] \end{aligned}$$

(Notar que en las partes anteriores habíamos trabajado para un n fijo, por lo que P_1 y P_2 dependen de ese n. Alternativamente, alguien puede haber reemplazado los P_1 y P_2 obtenidos, pero para efectos de correción la expresión anterior es suficiente).

4. Necesitamos calcular la probabilidad de que Don King demore menos tiempo que el primero de los secuaces de Jack en llegar al cajero. Esto es, que una uniforme de parámetros $(0,b)$ sea menor que una exponencial de parámetro $(n\lambda)$. Calculamos:

$$\text{P(v.a. } U_{(0,b)} < \text{ v.a. exp } (n\lambda)) = \int_0^b (\int_0^t \frac{1}{b} dy)(n\lambda e^{-n\lambda t})dt + \int_b^\infty (1)\cdot(n\lambda e^{-n\lambda t})dt = \frac{1}{bn\lambda}(1-e^{-n\lambda b})$$

Para que Jack retome sus estudios, necesitamos que esa probabilidad sea mayor que $\frac{1}{2}$.
Luego, la condición para b es que satisfaga la siguiente inecuación:

$$\frac{1}{n\lambda}(1-e^{-n\lambda b}) > \frac{b}{2}$$

Lo anterior es suficiente para efectos de corrección. Para mayor rigurosidad, se puede justificar la existencia de tal b por como construimos la expresión (también podemos tomar como ejemplo el caso $b = \frac{1}{n\lambda}$, que sí cumple la inecuación, etc...)

5. **(Bonus)** Llamemos x al número de secuaces que Jack envía al cajero. Planteamos un problema que optimice su función de utilidad:

$$\text{Max } U(x)_{\{x\in N, x\leq M\}} = K\cdot x - \frac{x^2}{4}$$

Para resolver, notemos primero que para x real, podemos derivar la función anterior e igualarla a cero. Esta ecuación tiene solución:

$$x^* = 2K$$

De las condiciones del problema $(K \in N, K < \frac{M}{2})$, sabemos que este número sí es factible para el problema de optimización de Jack, por lo que hemos encontrado el óptimo (alternativamente se podría haber justificado notando que la función toma la forma de una parábola, evaluar en el vértice -que es natural positivo- y en los dos vecinos para concluir).

Ahora, sólo nos resta calcular la probabilidad pedida:

$$\text{P(número de secuaces en reunión} \geq x^*) = \sum_{j=x^*}^{M} \binom{M}{j} p^j (1-p)^{M-j}$$

Dudas y/o Consultas:
Mario Guajardo
`mguajard@ing.uchile.cl`