



## CTP 1

### 15 de Marzo, 2005

El temido *Jack* y sus  $M$  secuaces ( $M > 0$ ) conforman una famosa banda dedicada al robo desde un cajero automático ubicado en una concurrida calle de *Felipilla*. La patrulla de esa comuna busca afanosamente reducir a la banda, pero hasta el momento no lo han conseguido debido a problemas operacionales.

Jack cita a sus secuaces para que a las 9:00 AM (diremos  $t = 0$ ) estén en la sede de la banda. A dicha reunión un secuaz cualquiera, independiente de todo lo demás, asiste con probabilidad  $p$ . Una vez reunidos, cada uno de los secuaces que asistieron a la reunión, demorará un tiempo distribuido según una v.a. exponencial de parámetro  $\lambda$  en acudir al cajero (variables iid). Cada uno de ellos robará un monto de dinero de éste, si es que la patrulla de Felipilla no se encuentra en el lugar. De lo contrario, será arrestado.

La patrulla, también a partir de las 9:00 AM, acudirá al cajero en un tiempo distribuido según una v.a. exponencial de parámetro  $\mu$ . Una vez en el lugar, permanecerá *indefinidamente* vigilando el cajero. La patrulla recibe una ganancia de  $\mathbf{R}$  unidades de imagen [u.i.] si alcanza a sorprender al *último* de los asaltantes intentando robar del cajero. Adicionalmente, si la patrulla llega antes que *todos* los asaltantes al lugar y, por lo tanto, sorprenderá a cada uno de ellos en sus intentos de robo al cajero, se adjudica un beneficio de  $\mathbf{B}$  [u.i.]. Por el contrario, si la patrulla no alcanza a sorprender a *ninguno* de los secuaces en el intento de robo, sufrirá un costo de  $\mathbf{C}$  [u.i.] ante la comunidad felipillana.<sup>1</sup>

- (1.5 pts)
  - Calcule la función de distribución acumulada del máximo de  $n$  v.a. exponenciales i.i.d. de parámetro  $\lambda$ .
  - Calcule la función de densidad del máximo de  $n$  v.a. exponenciales i.i.d. de parámetro  $\lambda$ .
  - Entregue una expresión para la probabilidad de que la patrulla llegue al cajero en un tiempo menor que  $t$ .
  - Dado que  $n$  secuaces han asistido a la reunión ( $0 < n \leq M$ ), entregue una expresión para la probabilidad de que la patrulla sorprenda al último de los asaltantes en su intento de robo al cajero.
- (1.5 pts) Dado que  $n$  secuaces han asistido a la reunión ( $0 < n \leq M$ ), ¿cuál es la probabilidad de que la patrulla sorprenda a todos los asaltantes en su intento de robo al cajero?
- (1.5 pts) Sean  $P_1$  y  $P_2$  las probabilidades encontradas en partes (1d) y (2), respectivamente. Entregue una expresión para la utilidad esperada de la patrulla en [u.i.].

Suponga ahora que existe otro temido asaltante de cajeros llamado *Don King* que pretende asaltar el mismo cajero felipillano que la banda de Jack. Don King actúa en solitario, sin secuaces, y también a partir de las 9:00 AM (recuerde que fijamos esa hora como  $t = 0$ ), acudirá al cajero en un tiempo distribuido según una v.a. uniforme de parámetros  $(0, b)$ . Si Don King llega antes que todos los otros secuaces, se roba todo el dinero del cajero, por lo que Jack decidirá desintegrar su banda y retomar sus estudios. Si al menos uno de los secuaces de Jack acude al cajero antes que Don King, Jack seguirá comandando su banda.

Considere que tanto Don King como la banda de Jack conocen una forma de acceder al cajero sin ser sorprendidos por la patrulla, por lo tanto, el tiempo al que ésta llega al lugar de los hechos es irrelevante para esta parte.

<sup>1</sup>Notar entonces que para efectos de beneficios y costos de la patrulla, los sucesos relevantes están dados por si llega al cajero antes que el primero de los asaltantes y por si llega antes o después que el último de ellos.

- (1.5 pts) Dado que  $n$  secuaces de Jack asisten a la reunión matinal ( $0 < n \leq M$ ), ¿Qué condición debe cumplir  $b$  para que la probabilidad de que Jack retome sus estudios sea mayor que la probabilidad de que siga comandando la banda de secuaces?

**Bonus (0.5 pts)**

Supongamos ahora que antes de las 9:00 AM, Don King decide no atacar el cajero de Felipilla, por lo cual no es relevante en esta parte.

Jack y sus secuaces siguen conociendo la forma de acceder al cajero que les permite asaltarlo independientemente de si la patrulla ha llegado al lugar o no. Por cada asaltante que accede al cajero, el monto robado es de  $K$  [u.m.] que será entregado íntegramente al jefe Jack ( $K \in N, K < \frac{M}{2}$ ). Éste, que algún tiempo atrás se dedicó a estudios varios, ha calculado que si  $x$  de sus secuaces acuden al cajero, él percibe un costo de  $\frac{x^2}{4}$  [u.m.] por concepto de traslados desde la sede al cajero.

- (0.5 pts) Plantee un problema de optimización que le permita encontrar el número  $x^*$  óptimo de secuaces que debe tener Jack en la reunión (i.e., el número que le permite maximizar su utilidad) y resuélvalo. ¿Cuál es la probabilidad de que a la reunión de las 9:00 AM llegue un número de secuaces mayor o igual que  $x^*$ ?