Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey, D. Sauré
Aux: C.Berner, M.Guajardo, A.Neely, D.Yung

Solución Clase Auxilliar 1, 8 de Marzo, 2005

Repaso Probabilidades

Solución Problema 1

1. Dado que la esperanza de una exponencial es el inverso multiplicativo del parámetro, una persona racional que no le guste esperar eligiría la fila 1 porque $\lambda > \mu$.
2. Dado que elegí la ventanilla 1, existen 2 configuraciones en la que me voy ultimo:
   - Se vaya primero el de la otra fila $\left(P_1 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)$.
   - Se vaya primero el de mi fila y además el de la otra fila se vaya antes que yo $\left(P_2 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

   Entonces, la probabilidad es:
   $$P(\text{irse ultimo}) = P_1 + P_2$$
3. Llámenos a las personas que están en la fila 1 como a y b (a antes que b) y a la persona antendiéndose en la fila 2 como c. Con esto, existen 3 configuraciones posibles para que yo me vaya último:
   - $a \to b \to c$ $\quad P_1 = \left((\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^2\right)$
   - $a \to c \to b$ $\quad P_2 = \left((\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^2 \cdot \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)$
   - $c \to a \to b$ $\quad P_3 = \left((\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^2 \cdot \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)$

   Finalmente, la probabilidad buscada es:
   $$P = P_1 + P_2 + P_3$$

Solución Problema 2

$$\begin{aligned} R &= \text{Respuesta correcta a la pregunta.} \\ A_1 &= \text{Respuesta dada por el ayudante 1 a la pregunta.} \\ A_2 &= \text{Respuesta dada por el ayudante 2 a la pregunta.} \end{aligned}$$

Tenemos que calcular:

$$P(R = d | A_1 = d \wedge A_2 = d) \quad = \quad \frac{P(A_1 = d \wedge A_2 = d | R = d) \cdot P(R = d)}{P(A_1 = d \wedge A_2 = d)}$$

Pero

$$
\begin{aligned}
P(A_1 = d \wedge A_2 = d | R = d) &= P(A_1\text{diga la verdad}) \cdot P(A_2\text{diga la verdad}) \\
&= \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \\
P(R = d) &= \frac{1}{9} \\
P(A_1 = d \wedge A_2 = d) &= \sum_{r=a}^{i} P(A_1 = d \wedge A_2 = d | R = r) \cdot P(R = r) \\
&= \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{9} + \sum_{\substack{r = a \\ r \neq d}}^{i} \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9}
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
P(R = d | A_1 = d \wedge A_2 = d) &= \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{1440} + \frac{1}{15}} \\
&= \frac{96}{97}
\end{aligned}
$$

Solución Problema 3

1. Hay que demostrar que:

$$P[x > s + t | x > s] = P[x > t]$$

   Entonces:

$$
\begin{aligned}
P[x > s + t | x > s] &= \tfrac{P[x > s+t \wedge x > s]}{P[x > s]} \\
&= \tfrac{P[x > s+t]}{P[x > s]} \\
&= \tfrac{1 - P[x \leq s+t]}{1 - P[x \leq s]} \\
&= \tfrac{1 - [1 - e^{-\lambda(s+t)}]}{1 - [1 - e^{-\lambda(s)}]} \\
&= \tfrac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda(s)}} \\
&= e^{-\lambda t} \\
&= P[x \geq t]
\end{aligned}
$$

2. Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
P[T_1 < T_2] &= \textstyle\int_0^\infty P[T_1 < T_2 | T_2 = t] \cdot f_{T_2}(t) dt \\
&= \textstyle\int_0^\infty P[T_1 < t] \cdot \mu e^{-\mu t} dt \\
&= \textstyle\int_0^\infty (1 - e^{-\lambda t}) \cdot \mu e^{-\mu t} dt \\
&= \textstyle\int_0^\infty \mu e^{-\mu t} dt - \int_0^\infty \mu e^{-(\mu+\lambda)t} dt \\
&= 1 - \tfrac{\mu}{\mu+\lambda} \cdot \textstyle\int_0^\infty (\mu + \lambda) e^{-(\mu+\lambda)t} dt \\
&= 1 - \tfrac{\mu}{\mu+\lambda} \\
&= \tfrac{\lambda}{\mu+\lambda}
\end{aligned}
$$

3. Debemos encontrar una expresión para

$$P[X = \text{mín}\{X_1, X_2, ..., X_n\} < t]$$

$$\begin{aligned}
P[X < t] &= 1 - P[X > t] \\
&= 1 - (P[X_1 > t] \cdot P[X_2 > t] ... \cdot P[X_n > t]) \\
&= 1 - \textstyle\prod_{i=1}^{n}(1 - F_{X_i(t)})
\end{aligned}$$

Para el caso exponencial tenemos que:

$$\begin{aligned}
P[X < t] &= 1 - \textstyle\prod_{i=1}^{n}(1 - F_{X_i(t)}) \\
&= 1 - \textstyle\prod_{i=1}^{n} 1 - 1 + e^{-\lambda t} \\
&= 1 - e^{-(\sum_{i=1}^{n} \lambda t)} \\
&= 1 - e^{-n\lambda t}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow X \rightsquigarrow exp(n\lambda)$

4. Llamamos λ_1 y λ_2 a los parmetros de las v.a. Poisson:

$$\begin{aligned}
P[X_1 + X_2 = N] &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} P[X_1 + X_2 = N | X_2 = i] \cdot P[X_2 = i] \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{N} P[X_1 = N - i] \cdot P[X_2 = i] \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{N} \frac{\lambda_1^{N-i} e^{-\lambda_1}}{(N-i)!} \cdot \frac{\lambda_2^{i} e^{-\lambda_2}}{i!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{N!} \cdot \textstyle\sum_{i=0}^{N} \frac{N!}{(N-i)!i!} \lambda_1^{N-i} \lambda_2 i \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^N}{N!}
\end{aligned}$$

Solución Problema 4

1. Para lograr dar k sin chocar es necesario que cada una de esas vueltas no resulten en un choque. Dado que la probabilidad de no chocar en una vuelta x es independiente de todo lo demás, se tendrá que:

$$P[\text{Dar más de k vueltas}] = (1 - q)^k$$

De esta forma, la probabilidad de terminar la carrera será:

$$P[\text{Dar V vueltas sin chocar}] = (1 - q)^V$$

2. Sin considerar a Feliceo, la probabilidad que (M-1) pilotos terminen la carrera, será:

$$P[\text{Terminen (M-1) de (C-1)}] = \binom{C-1}{M-1}((1 - q_1)^V)^{M-1}(1 - (1 - q_1)^V)^{C-M}$$

3. Utilizando un resultado conocido:

$$P[\text{Gane Feliceo }|\text{M}] = P[Exp(\mu)\text{le gane a minimo de M-1}Exp[\lambda]] = \frac{\mu}{\mu + (M-1)\lambda}$$

4. Siguiendo la indicación del enunciado:

$$\begin{aligned}
P[\text{Feliceo gane}] &= P[\text{Gane Feliceo}|\text{llega}]P[\text{llega}] + P[\text{Gane Feliceo}|\text{No lLega}]P[\text{No llega}] \\
&= P[\text{Gane Feliceo }|\text{llega}](1-q_2)^V + 0 \\
&= (1-q_2)^V \cdot \sum_{M=1}^{C} P[\text{Gane Feliceo}|\text{llega}|\text{llegan otros M - 1}]P[\text{llegan otros M - 1}] \\
&= (1-q_2)^V \cdot \sum_{M=1}^{C} \frac{\mu}{\mu+(M-1)\lambda}\binom{C-1}{M-1}((1-q_1)^V)^{M-1}(1-(1-q_1)^V)^{C-M}
\end{aligned}$$

5. Notemos que:

$$\begin{aligned}
E[\text{Utilidades}] &= E[\text{U(Ganar)}] + E[\text{U(Terminar)}] - E[\text{U(Chocar)}] \\
&= W \cdot (1-q_2)^V \cdot \sum_{M=1}^{C} \frac{\mu}{\mu+(M-1)\lambda}\binom{C-1}{M-1}((1-q_1)^V)^{M-1}(1-(1-q_1)^V)^{C-M} \\
&\quad + T\cdot(1-q_2)^V - R\cdot(1-(1-q_2)^V)
\end{aligned}$$

Dudas, consultas y comentarios a
aneely@ing.uchile.cl