Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey, D. Sauré
Aux: C.Berner, M.Guajardo, A.Neely, D.Yung

Solución Clase Auxilliar 2, 9 de Marzo, 2005

Repaso Probabilidades 2

Problema 1

Para determinar x^*, el momento óptimo para citar al segundo paciente, seguiremos los pasos dados en el enunciado del control.

1. Primero debemos calcular la probabilidad que, dado un x, el segundo paciente encuentre al medico ocupado. Esto es equivalente a la probabilidad que la atención del paciente se demore más de x (x$\geq$ 0) unidades de tiempo. Es decir:

$$P_x[\text{Encontrar al medico ocupado}] = \int_x^b \frac{\partial t}{(b-a)} = \frac{b-x}{(b-a)}$$

   Vemos que no tiene sentido que $x > b$ dado que implica que con certeza el medico estará libre.Tampoco tiene sentido un $x < a$ dado que con certeza el medico estará ocupado.

2. Primero separemos los casos:

   - Si encuentra al dentista ocupado la esperanza del tiempo restante de espera será:

$$E_x[\text{tiempo de espera}|\text{Medico ocupado}] = \int_x^b \frac{(t-x)\cdot\partial t}{(b-x)} = \frac{b-x}{2}$$

   - Si encuentra al dentista desocupado la esperanza del tiempo restante de espera será:

$$E_x[\text{tiempo de espera}|\text{Medico desocupado}] = 0$$

   - Entonces, combinando los resultados de las dos primeras partes, tenemos que:

$$\begin{aligned} E_x[\text{tiempo de espera}] = \quad & E_x[\text{tiempo de espera}|\text{Medico desocupado}]\cdot P_x[\text{Medico desocupado}] \\ & + E_x[\text{tiempo de espera}|\text{Medico ocupado}]\cdot P_x[\text{Medico ocupado}] \end{aligned}$$

$$E_x[\text{tiempo de espera}] = \frac{b-x}{b-a}\cdot\frac{b-x}{2} = \frac{(b-x)^2}{2\cdot(b-a)}$$

3. Claramente el medico estará en el consultorio hasta que termnine la atención del segundo paciente:

$$E_x[\text{Tiempo del medico en consulta}] = x + E_x[\text{tiempo de espera}] + E_[\text{tiempo de atención}]$$

$$E_x[\text{Tiempo del medico en consulta}] = x + \frac{(b-x)^2}{2\cdot(b-a)} + \frac{a+b}{2}$$

4. Entonces el problema de minimización a enfrentar será el siguiente:

$$\min_{0\leq x\leq b} M\cdot[x+\frac{(b-x)^2}{2\cdot(b-a)}+\frac{a+b}{2}]+P^2\cdot[\frac{(b-x)^2}{2\cdot(b-a)}]$$

Si derivamos e igualamos a 0 tenemos que:

$$M-\frac{M\cdot(b-x^*)}{b-a}-P^2\cdot\frac{(b-x^*)}{b-a}=0$$

Lo que implica que:

$$x^*=-\frac{M\cdot(b-a)-Mb-P^2b}{M+P^2}$$

Problema 2

Notar que el tipo asume que en el largo plazo chocará. (P[Chocar]=1) Primero veamos cual es la esperanza de los pagos producto de un choque, dado que el monto asegurado es X. Si el monto X se encuentra entre 100 y 500 se tendrá que:

$$\begin{aligned}
E[\text{Pagos}] &= \text{Pago Fijo}+E[\text{Gastos por choque}]\\
&= 0{,}1\cdot X+\int_{100}^{500}E[\text{Gastos por choque}|\text{Daños = t}]\cdot f_{\text{daños}}(t)dt\\
&= 0{,}1\cdot X+\int_{100}^{X}\frac{0{,}2t}{400}dt+\int_{X}^{500}\frac{t-0{,}9X}{400}dt\\
&= 0{,}1\cdot X+\frac{0,1}{400}(X^2-10000)+\frac{1}{800}(250000-X^2)-\frac{0{,}9}{400}(500-X)X
\end{aligned}$$

De la misma forma se puede ver que:

$$E[\text{Pagos}]=0,1X+E[U(100,500)]-0,9X=300-0,8X \quad \text{si } X<100$$

$$E[\text{Pagos}]=0,1X+0,2E[U(100,500)]=0,1\cdot X+0,2\cdot 300 \quad \text{si } X>500$$

Claramente si lo que se busca es minimizar la cantidad pagada suponiendo que se chocara entonces las cantidades óptimas para los tres rangos son:

$$X^*=100 \quad \text{si } X<100$$

$$X^*=500 \quad \text{si } X>500$$

$$X^*\Rightarrow 40+0{,}2X-X-450+1{,}8X=0 \quad \text{si}100\leq X\leq 500$$

$$X^*=410 \quad \text{si } 100\leq X\leq 500$$

De esta forma vemos que la esperanza de los pagos en cada rango serán:

$$E[\text{Pagos}^*]=220 \quad \text{si } X<100$$

$$E[\text{Pagos}^*]=110 \quad \text{si } X>500$$

$$E[\text{Pagos}^*]=\approx 108 \quad \text{si } 100\leq X\leq 500$$

Entonces conviene asegurar 410 unidades monetarias.

Problema 3

1. P(veleros funcionando dia siguiente) $= P$(No falle ninguno) $+ P$(Falle solo 1)

   P(veleros funcionando dia siguiente) $= (1-p)^3 + 3 \cdot p \cdot (1-p)^2$

2. P(solo 1 funcionando) $= P$(Los dos activos fallen) $= p^2$

3. Ahora debemos analizar caso a caso:
   - Si $C \leq X < N \Rightarrow$

     P(X veleros disponibles) $= P$(Fallen exactamente N-C+X veleros)

     P(X veleros disponibles) $= \frac{N!}{(N-X+C)! \cdot (X+C)!} \cdot p^{N-X+C} \cdot (1-p)^{X-C}$

   - Si $X = N \Rightarrow$

     P(X veleros disponibles) $= \sum_{i=0}^{C} \frac{N!}{(N-i)! \cdot i!} \cdot p^i \cdot (1-p)^{N-i}$

   - Para otro valor de $X \Rightarrow$

     P(X veleros disponibles) $= 0$

Problema 4

1. si cobro o por la entrada la probabilidad que un habitante en particular asista al estadio será 1. Esto implica que tendré un estadio lleno pero sin ganancias.

   Si cobro un precio muy alto la probabilidad será cercana a 0 por lo que tampoco tendré ganancias (dado que no ira gente).

   El trade-off es, precio muy alto implica más ganancias por persona pero menos asistencias.

2. Si cobro un precio p cada persona asistirá con probabilidad e^{-p}, entonces, sea X la cantidad de personas que asisten al estadio:

   $$P[X = k] = \frac{N!}{k! \cdot (N-k)!} e^{-pk} (1 - e^{-p})^{N-k}$$

   Claramente esto cobra sentido solo para valores de $k \leq N$.

3. Dado que la asistencia al estadio sigue una binomial se tendr que el ingreso esperado ser la esperanza de la binomial por el precio cobrado. Esto es:

   $$E_p[\text{Ingresos}] = N \cdot e^{-p} \cdot p$$

4. Para lograr esto debemos derivar e igualar a 0 (cuidando que el precio no sea negativa):

   $$\frac{\partial E_p[\text{Ingresos}]}{\partial p} = N \cdot e^{-p} - N \cdot e^{-p} \cdot p = 0$$

$$P = 1$$

De esta forma el ingreso máximo será entonces:

$$E_{p^*}[\text{Ingresos}] = N \cdot e^{-1}$$

`Dudas, consultas y comentarios a`
`aneely@ing.uchile.cl`