Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A : Optimización
Profesores: Natalia Yanković - Guillermo Durán
Patricio Conca - Patricia Zimmerman
Auxiliares: Alejandro Cataldo - Giovanni Medina
Francisco González

Pauta Control #1

Pregunta 1

1. Sea (P) el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{llll} \text{mín} & f(x) & & \\ s.a: & & & \\ & g_i(x) & \leq & 0 \qquad \forall i = 1, ..., m. \end{array}$$

con f, $g_i \in C^1$

   a) ¿Puede existir $\bar{x}$ punto factible de (P) que cumpla las condiciones de KKT y no sea mínimo local ni global? Justifique.

      Respuesta: Si, siempre que f o g_i no sean convexas.

   b) ¿Puede existir $\bar{y}$ mínimo local de (P) que no cumpla las condiciones de KKT? Justifique.

      Respuesta: Si, siempre que $\bar{y}$ no sea regular.

2. Sea (P) el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{llll} \text{mín} & f(x) & & \\ s.a: & & & \\ & h_i(x) & = & 0 \qquad \forall i = 1, ..., m. \end{array}$$

con f, $h_i \in C^1$

   ¿Bajo qué condiciones se puede asegurar que $\bar{x}$ es mínimo global de (P)? Justifique.

   Respuesta: Si f es convexa y h_i son afines (para que h_i sea afin debe cumplir con $h_i = a_i^\top x + b$) y $\bar{x}$ debe verificar la condición de lagrange, o sea, que existen $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{P} \lambda_i \nabla h_i(\bar{x})$.

3. Responda las siguientes preguntas sobre complejidad.

   a) ¿Existe algún problema que se encuentre en NP y también en P?

      Respuesta: Si, todos los problemas de P, pues P está incluido en NP.

b) ¿Se conoce algún problema que se encuentre en NP y no en P?

Respuesta: No, no se conoce ninguno. De hecho es un problema abierto saber si P es igual o distinto que NP.

4. Sea (P) el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & f(x) \\ s.a: & \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

con $f \in C^2$.

Escriba una condición suficiente para que $\bar{x}$ sea un mínimo local de (P).

Respuesta: Una condición es que $\nabla f(\bar{x}) = 0$ y $Hf(\bar{x})$ sea definido positivo.

Pregunta 2

La dirección de la escuela no ha estado indiferente a toda la parafernalia ocasionada por los *reality show*. Por lo mismo ha decidido implantar la modalidad de *eliminado por convivencia* y *eliminado por talento* al cuerpo docente. Para ello, ha decidido que el profesor que obtenga la peor evaluación en la encuesta docente (realizada mediante una votación para eliminar o no al profesor) y el profesor que tenga el curso con el mejor promedio serán eliminados de la escuela en cada semestre. Ante esta noticia, los profesores de optimización han decidido utilizar sus conocimientos para evitar sufrir una eliminación.

Dados los antecedentes históricos de este curso, se ha podido formular un modelo predictivo exacto para la nota que obtendrá cada alumno del curso en cada una de las J evaluaciones que se realizarán. Este modelo consiste en tomar la nota promedio de los cursos ya cursados por el alumno y agregarle un factor de corrección. La nota promedio ha sido obtenida de la base de datos de la escuela y corresponde a M_i, para el alumno i de los I inscritos este semestre. El factor de corrección es el producto entre el grado de dificultad que el profesor decide para cada evaluación y un ponderador que es particular para cada alumno. Este ponderador ha sido estimado en α_i para el alumno i, y el grado de dificultad será definido por los profesores entre los valores -10 y 10, donde -10 corresponde a una evaluación extremadamente difícil y 10 a una evaluación extremadamente fácil. Por otro lado, los profesores pueden realizar una bonificación a la nota final que obtuvo cada alumno.

La ponderación que tiene la evaluación j en el promedio final corresponde a β_j, y además, como política de los profesores puede haber a lo más 3 promedios 7.0 en el semestre. Además, de manera de no generar conflictos entre los alumnos que puedan dañar la imagen para los próximos semestres, los profesores han decidido que entre la bonificación máxima y mínima no debe existir una diferencia mayor a 2 puntos.

Se ha realizado un estudio del comportamiento de los alumnos de la escuela, y éste permitió determinar la siguiente función que entrega la probabilidad de que un alumno vote para que el profesor sea eliminado por convivencia al final de cada semestre:

$$P_i = 1 - \left[\frac{3 \cdot \text{Nota obtenida en el curso} + Pol_i - 3}{20} \right]$$

donde Pol_i indica si el alumno está pololeando o no, información que es conocida.

Por último, la probabilidad de ser eliminado por talento puede ser estimada a través de:

$$B = \frac{\text{Promedio obtenido por el curso} - 1}{6}$$

La idea de los profesores consiste en desarrollar un modelo de programación lineal continua que permita minimizar la probabilidad de ser eliminado, por convivencia o por talento, de la escuela, asumiendo que la probabilidad de ser eliminado por convivencia es la media de las probabilidades de que cada alumno del curso vote para que el profesor sea expulsado de la escuela.

Solución

1. Declaración de variables:

   y_i : nota final del alumno i
   x_{ij} : nota del alumno i en la evaluación j
   δ_j : nivel de dificultad dado a la evaluación j
   E_i : bonificación extra en nota dada al alumno i

2. Restricciones:

   a) Calculo de nota en cada evaluación:

   $$x_{ij} = M_i + \delta_j \cdot \alpha_i \qquad \forall i = 1, ..., I; \forall j = 1, ..., J.$$

   b) Límites sobre el valor posible para el grado de dificultad:

   $$\delta_j \geq -10 \qquad \forall j = 1, ..., J.$$

   $$\delta_j \leq 10 \qquad \forall j = 1, ..., J.$$

   c) No poner a ningún alumno una nota inferior a 1.0:

   $$x_{ij} \geq 1{,}0 \qquad \forall i = 1, ..., I; \forall j = 1, ..., J.$$

   d) Calcular la nota obtenida al final del curso por cada alumno:

   $$y_i = \sum_{j=1}^{J} x_{ij} \cdot \beta_j + E_i \qquad \forall i = 1, ..., I.$$

e) No poner a ningún alumno una nota superior a 7.0:

$$y_i \leq 7{,}0 \qquad \forall i = 1, ..., I.$$

f) No colocar más de 3 notas 7.0 en el semestre:

$$\sum_{i \in S} y_i \leq (7{,}0 \cdot |S|) - 0{,}1 \qquad \text{con } |S| = 4 \text{ y } S \subseteq I.$$

donde S son todos los subconjuntos de I formados por 4 elementos.

g) Evitar que exista una diferencia mayor a 2 puntos entre la bonificación mínima y máxima:

$$E_i - E_k \leq 2 \qquad \forall\, i, k \in I.$$

$$E_k - E_i \leq 2 \qquad \forall\, i, k \in I.$$

h) Naturaleza de las variables:

$$\begin{array}{rcll} y_i & \geq & 0 & \forall\, i \in I \\ x_{ij} & \geq & 0 & \forall\, i \in I; \forall\, j \in J \\ E_i & \geq & 0 & \forall\, i \in I \\ \delta_j & \in & \mathbb{R} & \forall\, j \in J \end{array}$$

3. Función Objetivo

$$\text{mín} \left[B + \frac{\sum_{i=1}^{I} P_i}{I} \right] = \left[\frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^{I} y_i}{I} - 1 \right)}{6} + \frac{\sum_{i=1}^{I} \left(1 - \left[\frac{3 \cdot y_i + Pol_i - 3}{20} \right] \right)}{I} \right]$$

Pregunta 3

1. Sea el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & f(x) = x_1 \\ s.a: & \\ & \begin{array}{rcl} (x_1 - 1)^2 + x_2^2 & \geq & 1 \\ (x_1 - 2)^2 + x_2^2 & \leq & 4 \\ (x_1 - 3)^2 + x_2^2 & \geq & 1 \end{array} \end{array}$$

a) Encuentre la solución óptima gráficamente. Verifique si esta solución óptima cumple las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

b) Encuentre 2 puntos más que cumplan las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. Explique que características tienen.

2. Sea el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lcl} \text{máx} & f(x) = x_2 & \\ s.a: & & \\ & (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 & \leq 1 \\ & x_2 & \leq 1 \end{array}$$

a) Encuentre gráficamente la(s) solución(es) óptima(s). Verifique si cumple(n) las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. Comente la situación.

b) Encuentre otro punto que cumpla las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. Comente de que punto se trata.

Suponga que la función objetivo se cambió por:

$$\text{mín}\, f(x) = x_1$$

c) Encuentre gráficamente la solución óptima y analice si cumple o no las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

Solución

1. Primero debe transformarse el problema original en un problema en forma estándar, quedando:

$$\begin{array}{llcll} \text{mín} & \tilde{f}(x) = -x_1 & & & \\ s.a: & & & & \\ & 1-(x_1-1)^2 - x_2^2 & \leq & 0 & (g_1) \\ & (x_1-2)^2 + x_2^2 - 4 & \leq & 0 & (g_2) \\ & 1-(x_1-3)^2 - x_2^2 & \leq & 0 & (g_3) \end{array}$$

Ahora escribamos $\nabla f(x)$ y $\nabla g_i(x)$:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \text{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -2\cdot(x_1-1) \\ -2\cdot x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (x_1 - 2) \\ 2 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} -2 \cdot (x_1 - 3) \\ -2 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

a) La solución óptima corresponde al punto $(x_1, x_2) = (4, 0)$, el cual se puede ver en la Figura 1.

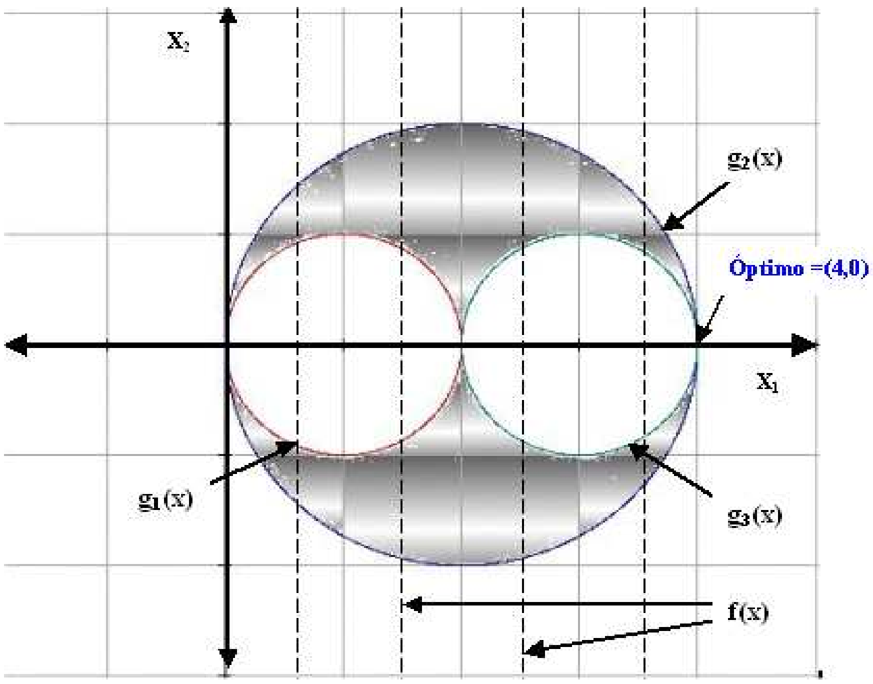

Figura 1: Gráfico asociado al problema inicial.

Para verificar las condiciones de KKT en ese punto se tiene:

- Las restricciones g_2 y g_3 son activas en el punto $(4, 0)$, por lo tanto u_2 y $u_3 \in \mathbb{R}$.
- La restricción g_1 es inactiva en el punto $(4, 0)$, por lo tanto $u_1 = 0$.

Utilizando una de las condiciones de KKT $(\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(x) = 0)$ se tiene que:

$$\begin{pmatrix} \text{-1} \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 2 \cdot (4 - 2) \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 2 \cdot (4 - 3) \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces se tiene la siguiente ecuación:

$$-1 + 4u_2 - 2u_3 = 0$$

Luego, es posible encontrar un par de valores para $u_2 \geq 0$ y $u_3 \geq 0$ que cumplan la restricción, por ejemplo $u_2 = 1$ y $u_3 = \frac{3}{2}$. Luego, existen u_1, u_2 y $u_3 \geq 0$ entonces se cumple la condición de KKT para el punto $(4, 0)$.

b) Otros dos puntos que cumplen con las condiciones de KKT pueden ser:

- Punto $(0, 0)$:
  En este punto las restricciones g_1 y g_2 son activas, por lo tanto u_1 y $u_2 \in \mathbb{R}$. La restricción g_3 es inactiva, por lo tanto $u_3 = 0$. Ahora, utilizando $\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(x) = 0$ se tiene que:

$$\begin{pmatrix} \text{-1} \\ 0 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2 \cdot (0-1) \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 2 \cdot (0-2) \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  entonces se obtiene la siguiente ecuación:

$$-1 + 2u_1 - 4u_2 = 0$$

  Luego, es posible encontrar un par de valores para $u_1 \geq 0$ y $u_2 \geq 0$ que cumplan la restricción, por ejemplo $u_1 = 1$ y $u_2 = \frac{1}{4}$. Luego, existen u_1, u_2 y $u_3 \geq 0$ entonces se cumple la condición de KKT para el punto $(0, 0)$.

- Punto $(2, 0)$:
  En este punto las restricciones g_1 y g_3 son activas, por lo tanto u_1 y $u_3 \in \mathbb{R}$. La restricción g_2 es inactiva, por lo tanto $u_2 = 0$. Ahora, utilizando $\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(x) = 0$ se tiene que:

$$\begin{pmatrix} \text{-1} \\ 0 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2 \cdot (2-1) \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 2 \cdot (2-3) \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  entonces se obtiene la siguiente ecuación:

$$-1 - 2u_1 + 2u_3 = 0$$

  Luego, es posible encontrar un par de valores para $u_1 \geq 0$ y $u_3 \geq 0$ que cumplan la restricción, por ejemplo $u_1 = 1$ y $u_2 = \frac{3}{2}$. Luego, existen u_1, u_2 y $u_3 \geq 0$ entonces se cumple la condición de KKT para el punto $(2, 0)$.

2. Sea el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lrcl} \text{máx} & f(x) = x_2 & & \\ s.a: & & & \\ & (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 & \leq & 1 \\ & x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

a) Primero, transformemos el problema planteado a la forma estándar y calculemos $\nabla f(x)$ y $\nabla g_i(x)$.

La forma estándar es:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & \tilde{f}(x) = -x_2 & \\ s.a: & & \\ & (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 - 1 & \leq 0 \\ & x_2 - 1 & \leq 0 \end{array}$$

Además:

$$\nabla \tilde{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{-1} \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (x_1 - 1) \\ 2 \cdot (x_2 - 1) \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gráficamente se puede apreciar (ver Figura 2) que la solución óptima al problema corresponde a todo el segmento comprendido entre los puntos $(0,1)$ y $(2,1)$.

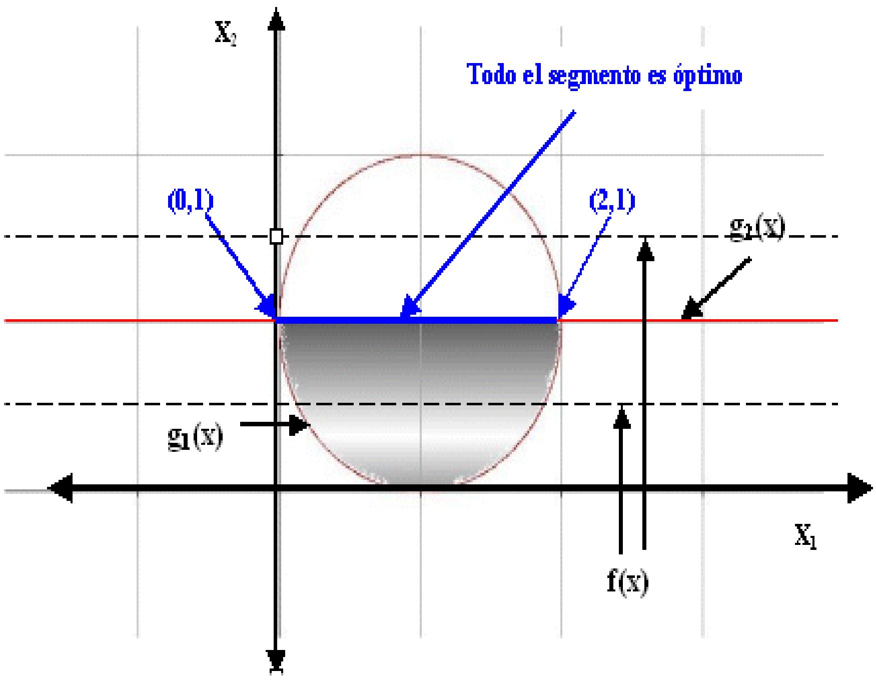

Figura 2: Gráfico asociado al problema inicial.

Luego, para analizar las condiciones de KKT, revisemos 3 casos:

- Segmento completo exceptuando los extremos: en este caso, las restricción g_1 es inactiva, por lo tanto $u_1 = 0$, y la restricción g_2 es activa, luego $u_2 \in \mathbb{R}$. Ahora, utilizando $\nabla \tilde{f}(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(x) = 0$ se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \text{-1} \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  entonces se obtiene la siguiente ecuación:

$$-1 + u_2 = 0$$

  Luego, $u_2 = 1$, y como existen u_1 y $u_2 \geq 0$ entonces se cumple la condición de KKT para cualquier punto del segmento.
- Punto $(0, 1)$: en este punto ambas restricciones son activas, por lo tanto u_1 y $u_2 \in \mathbb{R}$. Ahora, utilizando $\nabla \tilde{f}(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(x) = 0$ se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \text{-1} \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2 \cdot (0-1) \\ 2 \cdot (1-1) \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  entonces se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$-2u_1 = 0$$

$$-1 + u_2 = 0$$

  Luego, la solución a este sistema de ecuaciones es $u_1 = 0$ y $u_2 = 1$. Como existen u_1 y $u_2 \geq 0$ entonces se cumple la condición de KKT para el punto $(0, 1)$.
- Punto $(2, 1)$: en este punto ambas restricciones son activas, por lo tanto u_1 y $u_2 \in \mathbb{R}$. Ahora, utilizando $\nabla \tilde{f}(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(x) = 0$ se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \text{-1} \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2 \cdot (2-1) \\ 2 \cdot (1-1) \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  entonces se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$2u_1 = 0$$

$$-1 + u_2 = 0$$

  Luego, la solución a este sistema de ecuaciones es $u_1 = 0$ y $u_2 = 1$. Como existen u_1 y $u_2 \geq 0$ entonces se cumple la condición de KKT para el punto $(0, 1)$.

b) No es posible encontrar otro punto que cumplas las condiciones de KKT, esto porque la función ($f(x)$) y las restricciones ($g_i(x)$) son convexas, luego, cualquier otro punto que cumpla las condiciones de KKT necesariamente será óptimo global del problema, pero estos (los óptimos globales) ya han sido determinados y analizada la condición de KKT en ellos.

Suponga que la función objetivo se cambió por:

$$\min f(x) = x_1$$

c) Sobre el problema original solamente cambia el gradiente de la función objetivo, quedando:

$$\nabla \tilde{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La nueva solución se puede observar en la Figura 3.

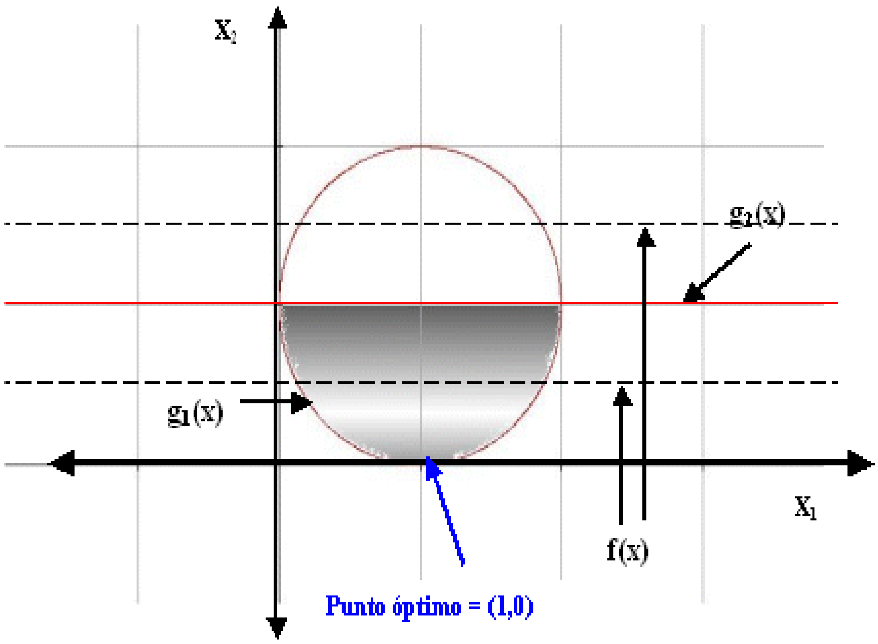

Figura 3: Gráfico asociado al problema modificado.

En este punto las restricción g_1 es activa, por lo tanto $u_1 \in \mathbb{R}$. La restricción g_2 es inactiva en el punto, luego $u_2 = 0$. Ahora, utilizando $\nabla \tilde{f}(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(x) = 0$ se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2 \cdot (1-1) \\ 2 \cdot (0-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$1 - 2u_1 = 0$$

Luego, la solución a esta ecuación es $u_1 = \frac{1}{2}$. Como existen u_1 y $u_2 \geq 0$ entonces se cumple la condición de KKT para el punto $(0, 1)$.

`Dudas, consultas y comentarios a...`
`Alejandro Cataldo Cornejo: acataldo@ing.uchile.cl`