

Universidad de Chile
Fac. de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

Curso: IN34A-Optimización

Semestre: Primavera 99

Profesores: A. Musalem/R. Weber

Patricio Conca

A. Muñoz/D. Varela

Auxiliares: Felipe Caro

Walter Krefft, Andrés Pardo

Alvaro Alomar, Richard Vega

Examen

jueves 8 de julio de 1999

Pregunta 1:

Un determinado taller se ha comprometido a entregar 1 carro de arrastre al mes durante los próximos 4 meses.

El taller tiene capacidad para fabricar durante 1 mes el número de carros que convenga. Así, puede guardar carros para satisfacer los compromisos de meses siguientes. Guardar 1 carro durante 1 mes cuesta 0,1 unidades monetarias. No se incurre en gasto de guarda si un carro es fabricado y entregado en el mismo mes. Suponga que el carro se entrega siempre a comienzos de cada mes.

El costo total por fabricación según mes se da en el cuadro siguiente:

Mes	Cantidad a Fabricar			
	1	2	3	4
1	5	10	15	17
2	6	9	12	-
3	5	7	-	-
4	3	-	-	-

El problema consiste en determinar cuánto se debe fabricar en cada mes de manera de minimizar los costos de fabricación y de guardar, cumpliendo con los compromisos de entrega.

Al comienzo de este período de 4 meses el taller no tiene carros de arrastre guardados y al final tampoco debe tenerlos. Como regla de operación el taller no fabrica carros si le quedan en bodega.

Pregunta 2:

(a) Dado un grafo $G = [N, A]$ con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y $A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

La cota superior y inferior para el flujo f_{ij} en un arco (i, j) es u_{ij} y l_{ij} respectivamente. El costo del flujo de una unidad en el arco (i, j) es c_{ij} . La siguiente tabla contiene las cotas superiores (u_{ij}) y los costos (c_{ij}) para cada arco.

(i, j)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)
u_{ij}	5	7	4	3	6	5
c_{ij}	5	4	3	1	4	2

La cota inferior para el flujo en cada arco es igual a cero ($l_{ij} = 0 \forall (i,j) \in A$).

Determine un flujo en el grafo G que transporte 11 unidades de un producto del origen (nodo 1) al destino (nodo 4) con costo mínimo a partir de la siguiente solución factible:

(i,j)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
f_{ij}	5	2	4	0	5	2

¿Cuál es el flujo óptimo? ¿Cuáles son los costos totales en el óptimo?

(b) Dado el problema del flujo a costo mínimo.

Dado un flujo factible en un grafo G, ¿cuántas variables son básicas si G tiene n nodos?

¿Cuál es el valor de una variable básica con respecto a sus cotas?

¿Cuál es la estructura del subgrafo formado por los arcos asociados a las variables básicas?

Pregunta 3:

(a) Dada una solución básica factible $(X_b, X_r) = (b, 0)$ para un problema de minimización. El valor de la función objetivo en ese punto es :

$$Z = C_b X_b + \bar{C}_r X_r = C_b \bar{b}$$

Comente qué sucede con la solución óptima cuando:

i) $C_j > 0$ para todo j asociado a una variable no básica y

ii) $C_k = 0$ para alguna variable no básica

(b) Explique para qué se usa y en qué consiste el Método Simplex Fase I

(c) Explique bajo qué condiciones se tiene una solución básica degenerada

(d) Defina y explique el concepto de precio sombra.

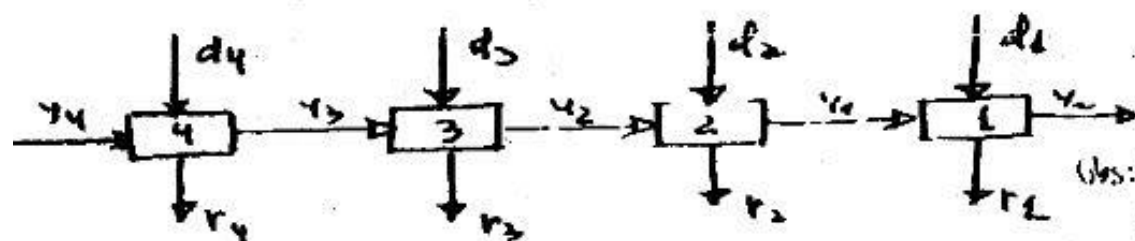
Pregunta 4:

La ONU necesita enviar alimentos a "i" países africanos que se encuentran afectados por desastres naturales.

La ONU dispone de bases en "j" países de Europa desde los cuales puede enviar alimentos a los países africanos el costo de enviar un kilogramo de alimento desde el país europeo "j" al país africano "i" es C_{ji} . Además, si se envían alimentos desde el país europeo "j" se debe pagar un costo fijo de F_j \$.

Cada país europeo "j" tiene una disponibilidad total de T_j kilos de alimentos para enviar a los países africanos. El país africano "i" debe recibir un mínimo de R_i kilos de alimentos.

Plantee un PPL que permita determinar la cantidad de alimentos (en kg) que se deben enviar de cada país europeo a cada país africano logrando el mínimo costo de transporte.



(Obs: Si algunos hicieran
 $[3] \rightarrow [2] \rightarrow [1] \rightarrow [0]$,
 consultar tabla con
 $n = 4, 3, 2, 1$)

d_j : carros a fabricar en el mes j

y_j : carros guardados al comienzo de mes
 j para satisfacer entregas en los
 meses $j, j+1, \dots, 4$.

r_j : costo de fabricación y guarda en el mes
 j .

n	y_n	d_n	y_{n-1}	r_n	$r_n + f_{n-1}(y_{n-1})$	$f_n(y_n)$
1	1	0*	0	0	$0 + 0 = 0$	0
	0	1*	0	3	$3 + 0 = 3$	3
2	2	0*	1	0,1	$0,1 + 0 = 0,1$	0,1
	1	0*	0	0	$0 + 3 = 3$	3
	0	2*	1	$7 + 0,1 = 7,1$	$7,1 + 0 = 7,1$	7,1
		1	0	$5 + 0 = 5,0$	$5,0 + 3 = 8,0$	
3	3	0*	2	0,2	$0,2 + 0,1 = 0,3$	0,3
	2	0*	1	0,1	$0,1 + 3 = 3,1$	3,1
	1	0*	0	0	$0 + 7,1 = 7,1$	7,1
	0	1	0	6,0	$6,0 + 7,1 = 13,1$	
		2*	1	$9,0 + 0,1 = 9,1$	$9,1 + 3 = 12,1$	12,1
		3	2	$12,0 + 0,2 = 12,2$	$12,2 + 0,3 = 12,5$	
4	0	1*	0	5,0	$5,0 + 12,1 = 17,1$	17,1
		2	1	$10,0 + 0,1$	$10,1 + 7,1 = 17,2$	
		3	2	$16 + 0,2$	$16,2 + 3,1 = 19,3$	
		4	3	$17 + 0,3$	$17,3 + 0,3 = 17,6$	
solución:		óptima:		$d_4 = 1$ $d_3 = 2$ $d_2 = 0$ $d_1 = 1$	$y_4 = 0$ $y_3 = 0$ $y_2 = 1$ $y_1 = 0$	Costo total: 17,6

Pauta de pregunta 2: (a)

Variables básicas:

$$\bar{c}_{2,4} = c_{2,4} - \pi_2 + \pi_4 = 4 - \pi_2 + \pi_4 = 0$$

$$\bar{c}_{3,4} = c_{3,4} - \pi_3 + \pi_4 = 2 - \pi_3 + \pi_4 = 0$$

$$\bar{c}_{1,3} = c_{1,3} - \pi_1 + \pi_3 = 4 - \pi_1 + \pi_3 = 0$$

$$\pi_4 = 0 \Rightarrow \pi_2 = 4, \pi_3 = 2, \pi_1 = -6$$

Variables no básicas:

$$\bar{c}_{1,4} = -c_{1,4} + \pi_1 - \pi_4 = -3 + (-6) = -9$$

$$\bar{c}_{1,2} = -c_{1,2} + \pi_1 - \pi_2 = -5 + (-6) - 4 = -15$$

$$\bar{c}_{2,3} = c_{2,3} - \pi_2 + \pi_3 = 1 - 4 + 2 = -1$$

\Rightarrow entra $f_{1,2}$ (disminuye su valor)

$$\varepsilon = \min \{f_{2,4} - l_{2,4}, u_{1,3} - f_{1,3}, u_{3,4} - f_{3,4}\} = \{5-0, 7-2, 5-2\} = 3$$

\Rightarrow sale $f_{3,4}$ (tiene flujo = cota superior)

Variables básicas:

$$\bar{c}_{2,4} = c_{2,4} - \pi_2 + \pi_4 = 4 - \pi_2 + \pi_4 = 0$$

$$\bar{c}_{1,2} = c_{1,2} - \pi_1 + \pi_2 = 5 - \pi_1 + \pi_2 = 0$$

$$\bar{c}_{1,3} = c_{1,3} - \pi_1 + \pi_3 = 4 - \pi_1 + \pi_3 = 0$$

$$\pi_1 = 0 \Rightarrow \pi_2 = -5, \pi_3 = -4, \pi_4 = -9$$

Variables no básicas:

$$\bar{c}_{3,4} = -c_{3,4} + \pi_3 - \pi_4 = -2 + (-4) - (-9) = 3$$

$$\bar{c}_{2,3} = c_{2,3} - \pi_2 + \pi_3 = 1 - (-5) + (-4) = 2$$

$$\bar{c}_{1,4} = -c_{1,4} + \pi_1 - \pi_4 = -3 + 0 - (-9) = 6$$

$\bar{c}_{i,j} \geq 0 \Rightarrow$ solución es óptima

¿Cuál es el flujo óptimo? ¿Cuáles son los costos totales en el óptimo?

Flujo óptimo:

(i,j)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
f_{ij}	2	5	4	0	2	5

Costos totales: $10 + 20 + 12 + 0 + 8 + 10 = 60$

(b)

Dado el problema del flujo a costo mínimo.

¿Cuántas variables son básicas en un grafo con n nodos?

En un grafo con n nodos n-1 variables son básicas.

¿Cuál es el valor de una variable básica con respecto a sus cotas?

Una variable básica tiene un valor entre sus cotas.

¿Cuál es la estructura del subgrafo formado por los arcos asociados a las variables básicas?

Un subgrafo formado por los arcos asociados a las variables básicas es un árbol generador del grafo original.

Pauta P3 Exámen

1.- Dada una solución básica factible $(X_b, X_r) = (\bar{b}, 0)$, para un problema de minimización. El valor de la función objetivo en ese punto es :

$$Z = C_b X_b + \bar{C}_r X_r = \bar{C}_b \bar{b}$$

Comente que sucede con la solución óptima cuando:

- i) $C_j > 0$ para todo j asociado a una variable no básica y
- ii) $C_k = 0$ para alguna variable no básica

Respuesta:

- i) Para este caso la solución es óptima y única, ya que los costos reducidos C_j en un punto óptimo proveen información de si éste tiene solución óptima única o si posee óptimos alternativos
- ii) En este caso X_k asociado puede crecer mientras se mantenga la factibilidad de la solución y el valor de la función objetivo no cambia, por lo tanto si en el óptimo existe una variable no básica con costo reducido nulo, entonces el problema admite puntos óptimos alternativos

2.- Explique¿para que se usa y en que consiste el Método Simplex Fase I?

Respuesta:

El algoritmo simplex parte de un vértice factible y se mueve, a través de una arista del poliedro factible que mejore la función objetivo, hasta encontrar el punto óptimo o bien detectar que el problema es no acotado, es decir necesita de una base primal factible para comenzar a iterar, sin embargo si las restricciones son de la forma $Ax \geq b$, $x \geq 0$ y b es no negativo, o si las restricciones son de la forma $Ax \leq b$, $x \geq 0$, pero b contiene alguna componente negativa, no es sencillo determinar una base primal factible, Por lo que se usa este metodo para la obtención de una base primal factible que permita resolver luego el problema original.

El Método Simplex Fase I consiste en definirse el problema auxiliar asociado, agregando a cada restricción una variable no negativa t_i , llamada variable artificial quedando las siguientes restricciones

Problema original $\text{Min } Z = cx$
s.a.

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Restricciones asociadas al problema en fase I

$$\begin{aligned} \text{Min } w &= \sum t_i \\ Ax + I t &= b \end{aligned}$$

$$X, t \geq 0$$

Donde t está en \mathbb{R}^n

Luego el valor óptimo del problema fase I se logra cuando $w=0$. Se inicia la iteración comenzando con la solución básica factible $x=0$ y $t=b$ hasta llegar a $t=0$ para todas las variables artificiales

3.- Explique bajo que condiciones se tiene una solución básica degenerada

Respuesta:

Un problema se dice degenerado si y solo si existe alguna base degenerada. Además Un problema es degenerado si b se puede escribir como combinación lineal de $m-1$ o menos vectores de A (siendo A una matriz de m columnas) o de igual forma si existe b_i tal que $b_i=0$.

4.- Defina y explique el concepto de precio sombra.

Respuesta:

Se entiende el precio sombra como la variación de la función objetivo en términos marginales al variar un recurso i . En el caso de una función objetivo que represente beneficios económicos, el precio sombra correspondería a la (máxima) disposición a pagar por una unidad adicional de este recurso.

Pauta Pregunta 4

Variables de decisión:

X_{ji} : Kilogramos de alimentos enviados del país j al país i

Y_j : $\begin{cases} 1 & \text{Se manda alimento desde país } j \\ 0 & \text{No} \end{cases}$

Función objetivo: $\text{Min } \sum_i \sum_j X_{ji} \cdot C_{ji} + \sum_j Y_j \cdot F_j$

S.a.

$$\sum_i X_{ji} \leq T_j \quad \forall j$$

$$\sum_j X_{ji} \geq R_i \quad \forall i$$

$$X_{ji} \leq M \cdot Y_j \quad \forall j, i$$

$$M \gg 1$$

$$X_{ji} \geq 0 \quad \forall i, j$$

$$Y_j \text{ binario } \{0,1\} \quad \forall j$$