



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A: Optimización
Profesor: Guillermo Durán
Auxiliar: Giovanni Medina

Control 1

Miércoles 14 de Abril, 2004

Problema 1

1. Responda las siguientes preguntas sobre Complejidad:
 - a) (1 punto) Suponga que tiene un algoritmo exponencial para resolver en forma exacta un problema de decisión Q. Puede afirmar que el problema Q no pertenece a la clase de problemas P (problemas polinomiales)? Justifique la respuesta.
 - b) (1 punto) Sea un problema Q perteneciente a la clase de problemas NP. Puede afirmar que no existe un algoritmo polinomial que resuelva en forma exacta el problema Q? Justifique la respuesta.
 - c) (1 punto) Sea un problema Q perteneciente a la clase de problemas NP-completos. Puede afirmar que no existe un algoritmo polinomial que resuelva en forma exacta el problema Q? Justifique la respuesta.
2. Responda las siguientes preguntas de métodos de descenso:
 - a) (1.5 puntos) Describa una iteración del Método del Gradiente y dé una justificación gráfica y/o conceptual de su funcionamiento.
 - b) (1.5 puntos) Describa una iteración del Método de Newton y dé una justificación gráfica y/o conceptual de su funcionamiento.

Problema 2

El connotado empresario gastronómico Armijo Catalán ha instalado un nuevo local de su cadena de restaurantes BarZas. Para asegurar el éxito de este proyecto ha hecho un exhaustivo estudio de las condiciones del mercado, obteniendo los siguientes resultados:

Armijo ha definido N posibles platos a poner en el menú, cada uno tiene un costo de C_i por porción y se vendería a un precio P_i por porción. Además en esta lista existen platos muy parecidos entre sí por lo que se pueden considerar sustitutos, el parámetro S_{ij} define este parentesco, siendo 0 si los platos i, j no son sustitutos y 1 si lo fueran. Armijo no quiere tener 2 platos sustitutos entre los escogidos.

Por otra parte, para atraer al público Armijo cuenta con E espectáculos posibles para presentar en las noches, los cuales influyen directamente en la cantidad de público que va al local y pide un plato. Así si Armijo escogiera el espectáculo k para la noche t , la demanda mínima de porciones del plato i sería $DMin_{ik}^t$ y la demanda máxima sería $DMax_{ik}^t$. Todas las noches deben haber uno o dos espectáculos, cuidando que si en una noche hay 2 espectáculos, entonces no puede haber otra noche con 2 espectáculos en los próximos 5 días. En una noche de 2 espectáculos las demandas mínimas y máximas corresponden a la suma de las demandas mínimas y máximas de cada espectáculo entregado esa noche. Cada espectáculo tiene un costo de $CosEsp_k^t$ en el día t .

En base a estos datos Armijo le ha solicitado a usted que modele el problema como un problema de programación lineal mixto que maximice las utilidades y permita decidir los platos a colocar en el menú y los espectáculos a contratar para los próximos T días.

Problema 3

Se tiene el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & y - x \\ \text{s.a.} & x^2 - y \geq 0 \\ & x^2 + y^2 \leq 2 \end{array}$$

1. (1 punto) Buscar el(los) óptimo(s) global(es) del problema a través del análisis gráfico y verifique numéricamente que cumple las condiciones de KKT.
2. (2.5 puntos) Encuentre al menos 2 puntos que verifiquen KKT y no sean óptimos globales del problema. Por qué puede darse esta situación? Justifique con detalle todas las afirmaciones que realice.
3. (2.5 puntos) Suponga que la primera restricción es modificada a $x^2 + y \leq 0$. Encuentre todos los puntos que verifiquen KKT. Son óptimos globales del problema? Justifique con detalle todas las afirmaciones que realice.

Pauta

Problema 1

1. .

- a) No, no pueden afirmarlo. Podría haber también un algoritmo polinomial para resolver el mismo problema dado que los problemas polinomiales es un subconjunto de los problemas exponenciales.
- b) No, no pueden afirmarlo. De hecho, todos los problemas de P están en NP.
- c) No, no pueden afirmarlo. No se sabe que no existan algoritmos polinomiales para los problemas NP-completos aunque aun no se conoce ningún algoritmo polinomial para un problema NP-completo.

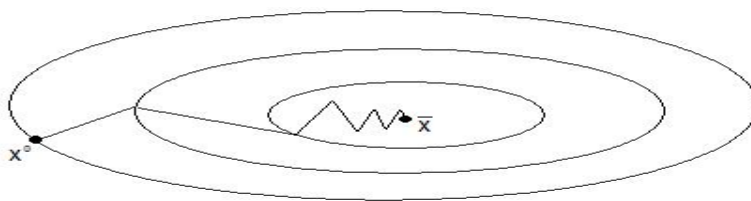
2. .

- a) Se define la iteración del método del gradiente (0,7 puntos):

$$x^{k+1} = x^k - \lambda_k \nabla f(x^k)$$

Luego pueden hacer una de las 2 opciones (0,8 punto):

- Explicar que el método se mueve en la dirección de máximo descenso producto que se mueve en contra del sentido del gradiente.
- Hacer algún gráfico mostrando las curvas de nivel y como se mueve el método, como por ejemplo un gráfico de este estilo:

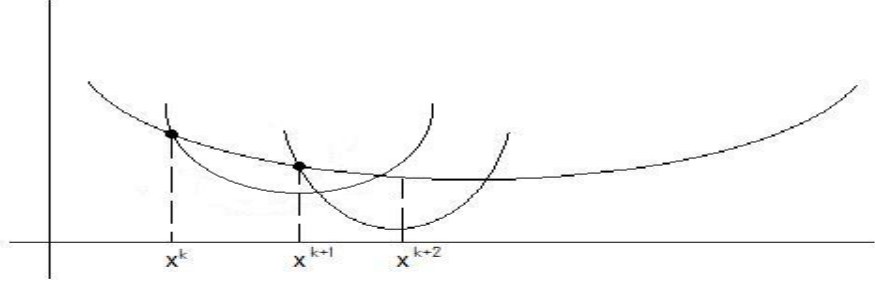


- b) Se define la iteración del método de Newton (0,7 puntos):

$$x^{k+1} = x^k - [Hf(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k)$$

Luego pueden hacer una de las 2 opciones (0,8 puntos):

- Explicar que el método se mueve en la dirección de menos el gradiente multiplicado por el Hessiano a la -1 (y que si la función es convexa esa dirección es de descenso).
- Hacer un gráfico diciendo que aproximan la curva por Taylor de grado 2 y van minimizando las funciones que le quedan. El gráfico debe ser algo como lo que se muestra a continuación:



Problema 2

Seguimos los pasos típicos:

1. Variables de Decisión:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Sí se escoje el plato } i \text{ para poner en el menú} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$Y_k^t = \begin{cases} 1 & \text{Sí se escoje el espectaculo } k \text{ para para el día } t \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$Z_i^t = \text{Cantidad de platos } i \text{ ha preparar el día } t$$

2. Restricciones:

a) No se pueden escoger 2 platos sustitutos para el menú

$$X_i + X_j \leq 2 - S_{ij} \quad \forall i, j = 0, \dots, N$$

b) Se debe escoger como mínimo un espectáculo diario

$$\sum_{k=1}^E Y_k^t \geq 1 \quad \forall t = 1, \dots, T$$

c) Se debe escoger como máximo dos espectáculos diarios

$$\sum_{k=1}^E Y_k^t \leq 2 \quad \forall t = 1, \dots, T$$

d) No pueden haber noches de 2 espectaculos con una diferencia menor de 5 días

$$\sum_{p=t}^{t+5} \sum_{k=1}^E Y_k^p \leq 7 \quad \forall t = 1, \dots, T - 5$$

e) Cubrir la demanda mínima de platos

$$Z_i^t \geq \sum_{k=1}^E DMin_{ik}^t Y_k^t \quad \forall i = 1, \dots, N, \forall t = 1, \dots, T$$

f) Cubrir la demanda máxima de platos

$$Z_i^t \leq \sum_{k=1}^E DMax_{ik}^t Y_k^t \quad \forall i = 1, \dots, N, \forall t = 1, \dots, T$$

g) Producir porciones de un plato, solo si así se decidió

$$Z_i^t \leq M X_i \quad \forall i = 1, \dots, N, \forall t = 1, \dots, T \quad \text{con } M \gg 0$$

$$M \text{ puede ser reemplazado por } \sum_{k=1}^E DMax_{ik}^t$$

h) Naturaleza de las variables

$$X_i, Y_k^t, Z_k \in \{0, 1\} \quad \forall i, k, t$$

$$Z_i^t \geq 0 \quad \forall i, t$$

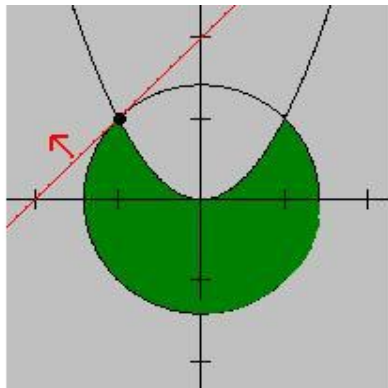
3. Función Objetivo:

$$\text{máx Utilidades} = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (P_i - C_i) Z_i^t - \sum_{k=1}^E \sum_{t=1}^T CosEsp_k^t Y_k^t$$

Nota de Corrección: De ser ésta la forma en que el alumno modeló el problema, asigne 0,5 puntos a cada variable, a cada restricción y a la función objetivo (no olvide sumar el punto base). De modelarlo de una forma distinta (por lo general más extensa por poner más variables) vea cuantas restricciones y variables tiene en total el modelo correcto y divida las 60 décimas en el numero total de variables, restricciones y fn objetivo, asignando ese puntaje a cada item correcto.

Problema 3

1. Veamos el análisis gráfico:
El punto óptimo es el (-1,1).



Verifiquemos las condiciones de KKT:

Llevemos al problema a la forma necesaria para aplicar KKT:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & x - y \\ \text{s.a.} & -x^2 + y \leq 0 \\ & x^2 + y^2 - 2 \leq 0 \end{array}$$

Ambas restricciones son activas en el óptimo, por lo tanto debe satisfacerse que

$$\nabla f(-1, 1) + \mu_1 \nabla g_1(-1, 1) + \mu_2 \nabla g_2(-1, 1) = 0$$

Así:

$$\nabla f(x, y) = (1, -1) \Rightarrow \nabla f(-1, 1) = (1, -1)$$

$$\nabla g_1(x, y) = (-2x, 1) \Rightarrow \nabla g_1(-1, 1) = (2, 1)$$

$$\nabla g_2(x, y) = (2x, 2y) \Rightarrow \nabla g_2(-1, 1) = (-2, 2)$$

Luego tenemos:

$$(1, -1) + \mu_1(2, 1) + \mu_2(-2, 2) = 0$$

El sistema queda:

$$2\mu_1 - 2\mu_2 = -1$$

$$\mu_1 + \mu_2 = 1$$

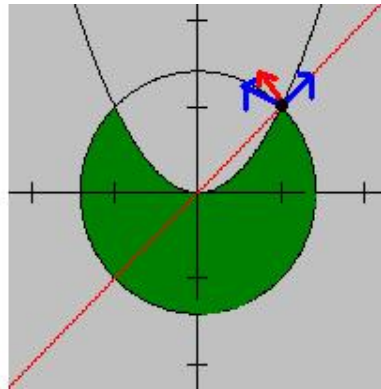
$$\Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{4}, \mu_2 = \frac{3}{4}$$

Con esto el punto verifica KKT.

Nota de Corrección: Se asignan 0,5 puntos por encontrar el óptimo gráficamente y 0,5 puntos por verificarlo numéricamente.

2. Existen solo 2 puntos, además del óptimo, que cumplen KKT, veámoslos gráficamente:

■ .



Vemos que el punto (1,1) cumple con KKT, verifiquemoslo numéricamente (no es necesario si el gráfico muestra el cono formado por los gradientes):

En este punto ambas restricciones son activas, luego

$$\nabla f(1, 1) = (1, -1)$$

$$\nabla g_1(1, 1) = (-2, 1)$$

$$\nabla g_2(1, 1) = (2, 2)$$

Así se tiene que:

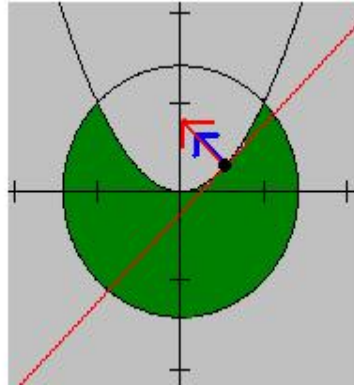
$$-2\mu_1 + 2\mu_2 = -1$$

$$\mu_1 + 2\mu_2 = 1$$

$$\Rightarrow \mu_1 = \frac{2}{3}, \mu_2 = \frac{1}{6}$$

Luego se verifica que el punto cumple KKT.

■ .



Para calcular el punto que lo cumple se pueden usar 2 formas:

La primera dice que el punto viene dado por donde el gradiente de la función objetivo sea paralelo al de la primera restricción, o sea:

$$(1, -1) = \alpha(-2x, 1)$$

$$\Rightarrow \alpha = -1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Y como además el punto pertenece a la parabola, $\frac{1}{4} - y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4}$

Finalmente el punto buscado es el $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

La segunda opción es encontrar el punto donde la función objetivo intersecta en un solo punto a la parabola, o sea se busca que:

$$y - x = a$$

$$x^2 - y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = y$$

Luego

$$x^2 - x - a = 0$$

As, para que la intesección sea un solo punto a debe ser tal que la expresión anterior sea un cuadrado perfecto, luego $a = \frac{1}{4}$ con lo que nos queda:

$$(x - \frac{1}{2})^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Con esto $y = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, luego el punto que se busca es el $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

Luego vemos del gráfico que el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ cumple con KKT, verifiquemoslo numéricamente (no es necesario si el gráfico muestra el cono formado por los gradientes):

En este punto solo la primera restricción es activa, luego

$$\nabla f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = (1, -1)$$

$$\nabla g_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = (-1, 1)$$

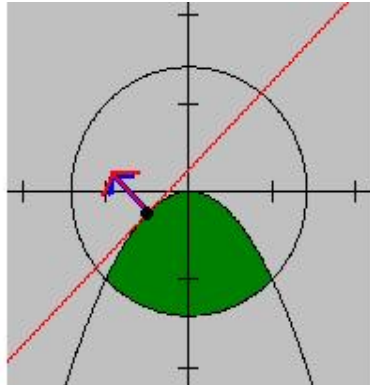
Así se tiene que con $\mu_1 = 1$ se cumple la condición de KKT.

Esta situación puede darse ya que la región factible no es convexa, lo cual se prueba de la siguiente forma:

Sabemos que los puntos $(-1,1)$ y $(1,1)$ pertenecen a la región factible, luego si fuera convexo cualquier punto de la recta $\lambda(-1,1) + (1-\lambda)(1,1)$ debería pertenecer a la región factible, tomemos $\lambda = \frac{1}{2}$, con esto resulta el punto $(0,1)$ que claramente no pertenece a la región factible ya que $0^2 - 1 = -1 < 0 \Rightarrow$ la región factible no es convexa.

Nota de Corrección: Asigne 0,7 puntos para cada punto encontrado por el alumno que cumple KKT y que no sea óptimo, 0,8 puntos para la justificación de porque se pueden encontrar puntos no óptimos que cumplen KKT y 0,5 puntos para la demostración de la no convexidad de la región factible.

3. En este caso tenemos solo un punto que cumple KKT, dado que la región factible y la función objetivo es convexa. El óptimo se muestra en la figura:



Para calcular el óptimo se pueden usar 2 formas:

La primera dice que el óptimo viene dado por donde el gradiente de la función objetivo sea paralelo al de la primera restricción, o sea:

$$(1, -1) = \alpha(2x, 1)$$

$$\Rightarrow \alpha = -1$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Y como además el punto pertenece a la parabola, $\frac{1}{4} + y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}$

Finalmente el punto buscado es el $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$.

La segunda opción es encontrar el punto donde la función objetivo intersecta en un solo punto a la parabola, o sea se busca que:

$$y - x = a$$

$$x^2 + y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = -y$$

Luego

$$x^2 + x + a = 0$$

As, para que la intersección sea un solo punto a debe ser tal que la expresión anterior sea un cuadrado perfecto, luego $a = \frac{1}{4}$ con lo que nos queda:

$$(x + \frac{1}{2})^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Con esto $y = -(-\frac{1}{2})^2 = -\frac{1}{4}$, luego el punto que se busca es el $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

Verifiquemos que cumple con KKT:

En este punto solo la primera restricción es activa, luego tenemos:

$$\nabla g_1(x, y) = (2x, 1)$$

Luego

$$\nabla f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}) = (1, -1)$$

$$\nabla g_1(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}) = (-1, 1)$$

Así con $\mu_1 = 1$ se cumple la condición de KKT.

Como la región factible y la función objetivo son convexas, el punto encontrado es óptimo global. Demostremos que la región factible y la función objetivo son convexas:

- Función Objetivo:

Calculemos el hessiano de la fn obj

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El cual es definido positivo (y negativo a la vez) por lo que la función es convexa.

- Región Factible:

Se puede usar cualquier método para demostrar la convexidad, por ejemplo se pueden tomar 2 puntos cualquiera de la región factible: (x, y) y (x', y') . Demostremos que cualquier punto de la recta $\lambda(x, y) + (1 - \lambda)(x', y') =$ con $\lambda \in [0, 1]$ pertenece a la región factible.

Nota de Corrección: Asignar 0,5 puntos a encontrar el punto óptimo, 0,5 a verificarlo, 0,5 punto por decir que el punto encontrado es el único que cumple KKT y 0,5 por decir que el punto encontrado es óptimo porque la función y la región factible son convexas, finalmente 0,5 puntos por demostrar la convexidad de la función y de la región factible.

Dudas y/o Consultas:
Giovanni Medina Reyes
 gmedina@ing.uchile.cl