

**06 de Abril de 2005  
Pauta Auxiliar N°3**

**Pregunta 1**

Comente o responda las siguientes preguntas:

- a) En todos los problemas de optimización, lo más conveniente es utilizar un algoritmo para resolverlo, ya que estos aseguran encontrar la solución óptima.

**Respuesta: Es cierto que los algoritmos garantizan optimalidad. Sin embargo para algunos problemas no es posible encontrar algoritmos eficientes (que demoren un tiempo razonable) que los resuelvan. En esos casos, es preferible buscar heurísticas para resolver el problema. Estas no garantizan optimalidad, pero si la heurística es de buena calidad podríamos encontrar soluciones cercanas a la óptima y en un tiempo razonable. Es decir, se sacrifica conocer exactamente la solución óptima, pero se gana eficiencia en la resolución.**

- b) Un modelo es una abstracción de la realidad, en la cuál se intentan capturar todos los elementos relevantes del problema en la medida de lo posible, es decir mientras el modelo sea manejable. Construya un ejemplo basado en una situación realista relacionada a la investigación de operaciones, en el cual se deben hacer supuestos para simplificar el modelo. Los supuestos deben ser razonables, de modo que el modelo sea una buena aproximación de la realidad.

**Respuesta: Un posible ejemplo puede ser el siguiente.**

**Una empresa que maximiza su utilidad sujeto a su capacidad de producción. La capacidad no se conoce con certeza, ya que existe incertidumbre. Sin embargo se tiene una buena estimación de su promedio. Si la variabilidad de la capacidad no es muy alta, el modelo determinístico utilizando la capacidad promedio es un buen modelo de la realidad.**

- c) Los métodos de descenso para optimización irrestricta garantizan encontrar un óptimo global.

**Respuesta: Los métodos de descenso convergen a un punto estacionario (o todo punto de acumulación de la sucesión es estacionario), es decir a un punto en el que:**

$$\nabla f(\bar{x}) = 0$$

**que no necesariamente corresponde a un mínimo global. Podría darse el caso que se trate de un mínimo local.**

**Para asegurar convergencia a un mínimo global, se requieren condiciones adicionales. Por ejemplo, si  $f(x)$  es convexa, el método del gradiente converge a un punto mínimo global.**

- d) Escriba la condición necesaria de primer orden para el problema (P), en función del gradiente de  $f$  y del conjunto de direcciones factibles para un punto dado. Explique geoméricamente la condición.

$$(P) \text{ Min } f(x) \\ \text{s.a. } x \in \mathfrak{R}^n$$

**Respuesta: Condición de 1er Orden para (P)**

Sea  $f \in C^1$  y  $x^*$  mínimo local de (P), entonces:

$$\nabla f(x^*)^T \cdot d \geq 0, \quad \forall d \in D(x^*)$$

**Conjunto de Direcciones Factibles en  $x^*$**

**Geométricamente, significa que si nos movemos en cualquiera de las direcciones factibles, la función crece, por lo tanto  $x^*$  es mínimo local.**

**Haciendo Taylor de primer orden, se puede mostrar que:**

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x^* + \lambda d) - f(x^*)}{\lambda} = \nabla f(x^*)^T \cdot d$$

**El termino de la izquierda corresponde a derivada parcial de f en  $x^*$  en la dirección d.**

**Si  $Df(x^*, d) \geq 0, \forall d \in D(x^*)$ , significa que si nos movemos un pequeño valor en cualquier dirección factible, la función crece. Entonces  $x^*$  es un mínimo local.**

e) Sea (P) el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a. } g_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ f, g_i \in C^1 \end{aligned}$$

1.¿Puede existir  $x^*$  punto factible de (P) que verifique las condiciones de KKT y no sea mínimo local?

**R. Si, por ejemplo si la f o las g no son convexas.**

2.¿Puede existir  $y^*$  mínimo local de (P) que no verifique las condiciones de KKT?

**R. Si, si el punto no es regular.**

## Pregunta 2

Una conocida compañía de transporte llama a principio de año a una licitación publica de combustible (petróleo) para así asegurar el abastecimiento de los G galones que necesita para funcionar todo el período. A la licitación se presenta se presentan N petroleras y cada una de ellas con varias ofertas. Sea J(n) el número de ofertas que presenta la empresa n.

La  $j$ -ésima oferta de la petrolera  $n$  consiste en un costo fijo  $C_{jn}$  mas un precio  $P_{jn}$  (\$/galón). Si la compañía licitadora acepta la oferta  $j$  de la petrolera  $n$ , le tiene que pagar el monto fijo  $C_{jn}$  y le tiene que comprar, al precio  $P_{jn}$ , mas de  $MIN_{jn}$  galones pero menos de  $MAX_{jn}$ . La compañía a lo más puede aceptar una oferta por petrolera.

Formule un modelo lineal mixto que le permita a la compañía de transporte decidir cuales ofertas acepta y cuantos galones le compra a cada petrolera de tal manera que el costo total sea mínimo.

## Respuesta

### Variables de Decisión

$$x_{jn} = \begin{cases} 1 & \text{Si se acepta la } j\text{-ésima oferta de la empresa } n. \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$$

$$y_{jn} = \text{Galones de combustible que se le compra a la empresa } n.$$

### Restricciones

- i. Se puede aceptar a lo mas una oferta por empresa.

$$\sum_{j=1}^{J(n)} x_{jn} \leq 1 \quad \forall n = 1, \dots, N$$

- ii. Cantidad máxima de la oferta  $j$  de la empresa  $n$ .

$$y_{jn} \leq MAX_{jn} \cdot x_{jn} \quad \forall n = 1, \dots, N$$

$$\forall j = 1, \dots, J(n)$$

- iii. Cantidad mínima.

$$MIN_{jn} \cdot x_{jn} \leq y_{jn} \quad \forall n = 1, \dots, N$$

$$\forall j = 1, \dots, J(n)$$

- iv. Asegurar abastecimiento de  $G$  galones.

$$\sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{J(n)} y_{jn} = G$$

- v. Naturaleza de las variables.

$$x_{jn} \in \{0,1\} \quad \forall n = 1, \dots, N$$

$$y_{jn} \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, J(n)$$

### Función Objetivo

$$\min z = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{J(n)} (P_{jn} y_{jn} + C_{jn} x_{jn})$$

### Pregunta 3

Sea el siguiente problema

$$\begin{aligned} \min f(x_1, x_2) &= x_1 \\ \text{s.a. } (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 &= 5 \\ (x_1 - 3)^2 + x_2^2 &\leq 9 \end{aligned}$$

Verificar el cumplimiento del sistema Kuhn-Tucker para los siguientes puntos:

$$A(0,0)$$

$$B(2 + \sqrt{5}, 1)$$

$$C(3,3)$$

Explique la situación de cada punto y el por que del cumplimiento o no cumplimiento. Se recomienda apoyar su respuesta a través de un análisis gráfico.

### Respuesta

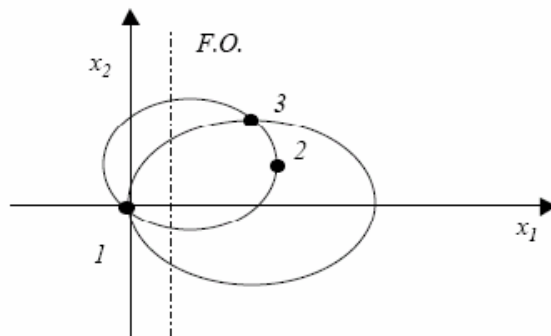
Plantaremos las condiciones existentes dentro del sistema de KKT.

i) Pasar a Forma Estándar

$$\text{ii) } \mu_i \cdot g_i(x') = 0$$

$$\text{iii) } \nabla f(x') + \sum_{i=1}^m \nabla g_i(x') = 0$$

Analizaremos la gráfica del problema para conocer un poco más del problema.



$$\begin{array}{ll} 1 & x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \\ 2 & x_1 = 2 + \sqrt{5} \quad x_2 = 1 \\ 3 & x_1 = 3 \quad x_2 = 3 \end{array}$$

Veamos en el problema aplicado.

$$\begin{aligned} \text{i) } g_1(x_1, x_2) &: (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 - 5 = 0 \\ g_2(x_1, x_2) &: (x_1 - 3)^2 + x_2^2 - 9 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \begin{aligned} \mu_1 \cdot [(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 - 5] &= 0 \\ \mu_2 \cdot [(x_1 - 3)^2 + x_2^2 - 9] &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{iii) } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 2(x_1 - 2) \\ 2(x_2 - 1) \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2(x_1 - 3) \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Analicemos cada una de las etapas para cada punto en cuestión.**

• **A(0,0)**

i) **Estamos OK.**

ii) **Podemos ver que ambas restricciones son activas, por lo tanto los valores de  $\mu_1$  y  $\mu_2$  deben pertenecer a los reales.**

iii) **Aplicamos el punto en el problema:**

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Equivalente a:**

$$\begin{aligned} 1 - 4\mu_1 - 6\mu_2 &= 0 \\ -2\mu_1 &= 0 \end{aligned}$$

**Por lo tanto:**

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= 1/6 \end{aligned}$$

**Luego "Cumple KKT", por lo tanto es un mínimo local.**

• **B(2+ $\sqrt{5}$ ,1)**

i) **Estamos OK.**

ii) **Podemos ver que solo la primera restricción es activa, por lo tanto los valores de  $\mu_1$  debe pertenecer a los reales y  $\mu_2 = 0$ .**

iii) **Aplicamos el punto en el problema:**

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Equivalente a:**

$$1 + 2\mu_1\sqrt{5} = 0$$

**Por lo tanto:**

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -1/(2\sqrt{5}) \\ \mu_2 &= 0 \end{aligned}$$

**Luego "Cumple KKT", por lo tanto es un mínimo local.**

- **C(3,3)**

i) **Estamos OK.**

ii) **Podemos ver que ambas restricciones son activas, por lo tanto los valores de  $\mu_1$  y  $\mu_2$  deben pertenecer a los reales.**

iii) **Aplicamos el punto en el problema:**

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Equivalente a:**

$$1 + 2\mu_1 = 0$$

$$4\mu_1 + 6\mu_2 = 0$$

**Por lo tanto:**

$$\mu_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{3}$$

**Luego "Cumple KKT", por lo tanto es un mínimo local.**

**Por lo tanto todos los puntos cumplen con KKT, sin embargo basándonos en la grafica que exponemos antes podemos ver que:**

$A(0,0)$	Es Óptimo
$B(2 + \sqrt{5}, 1)$	Es Máximo
$C(3,3)$	Es Mínimo