



**Pauta Control 1 IN34A
13 de Abril de 2005**

Pregunta 1

- 1- Explique qué es un problema de decisión y qué es un problema de optimización. Dé un ejemplo de cada uno. (1 punto)**
- 2- a) Describa una iteración del Método de Newton para optimización no lineal irrestricta. (0,5 puntos)**
- b) Explique conceptual y gráficamente el funcionamiento del método. (1 punto)**
- c) ¿Converge siempre el método al mínimo global del problema? Analice qué sucede en el siguiente ejemplo:
 $f(x) = x^4 - 24x^2$ con $x_0 = 1$. (1,5 puntos)**
- 3- a) Escriba y grafique un problema de programación lineal infactible. (1 punto)**
- b) ¿Puede existir un óptimo de un problema de programación lineal que no sea un vértice del poliedro factible?
Si la respuesta es si, de un ejemplo y gráfiquelo; si la respuesta es no, explique porque. (1 punto)**

Solución:

- 1- Un problema de decisión es un problema en el cual hay que responder una pregunta que tiene 2 opciones: SI o NO. Un ejemplo de un problema de decisión es dado un conjunto de ciudades y un entero k , existe un tour a través de todas las ciudades de longitud $\leq k$?

Un problema de optimización en cambio, es un problema en el cual se debe tomar la decisión que permita obtener el mejor desempeño de un sistema, los problemas generales de optimización desean encontrar el mejor valor de una medida de desempeño (función objetivo) con la condición adicional que las variables de decisión cumplan ciertas limitaciones (restricciones). Un ejemplo de problema de optimización puede ser aquel en que se debe decidir la ruta óptima a utilizar por una empresa para minimizar los costos de transporte sujeto a la cantidad de vehículos que posee la empresa.

Los ejemplos son subjetivos, utilizar criterio.

Nota de corrección: 0,25 para cada explicación y 0,25 para cada ejemplo.

2.- a) Iteración k:

Calcular el gradiente de la función objetivo y verificar si $\nabla f(x^k) = 0$

-Si no, calcular el inverso del hessiano de la función objetivo para obtener el siguiente punto como se indica a continuación:

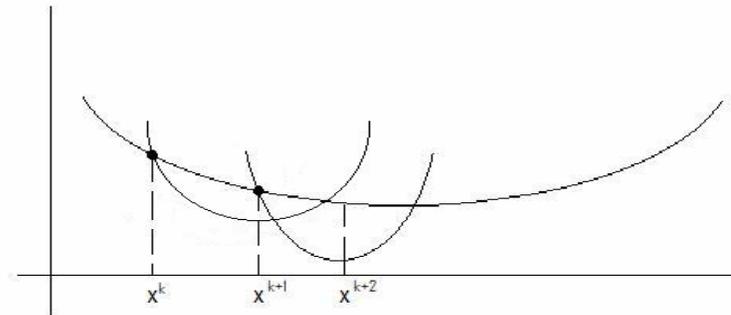
$$x^{k+1} = x^k - [Hf(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k)$$

-Si si entonces se acaba la iteración y el punto x^k es el buscado.

Nota de corrección 0,5 si escriben bien la iteración.

b) El método de Newton se basa en aproximar la función f por una función cuadrática (en cada punto x^k se aproxima por la expansión de Taylor de orden 2) y esta aproximación se minimiza exactamente, generando un nuevo punto x^{k+1} .

Se detiene la aproximación cuando se llega a un punto estacionario de la función aproximada (en la práctica también se puede detener cuando el gradiente de la función objetivo toma un valor muy pequeño y/o cuando dos iteraciones consecutivas del método dan valores muy aproximados).



Nota de corrección 0,5 para la explicación conceptual y 0,5 la explicación gráfica.

c) Se puede observar que

$$f'(x) = 4x^3 - 48x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 48$$

Así se tiene que:

Iteración	Punto (x)	Gradiente (f'(x))	Hessiano (f''(x))	Función objetivo
0	1	-44	-36	-23
1	- 2/9	7744/729	-1280/27	-1042/81
2	1/540	- 4/45	-48	0
3	0	0	-48	0

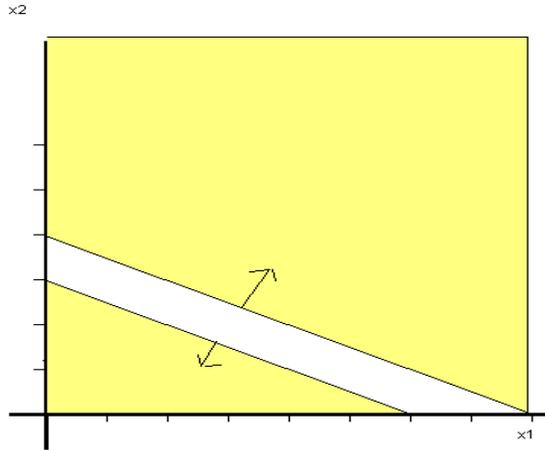
Los valores están puestos en fracciones.

Como se puede observar el método hace crecer a la función objetivo, convergiendo a un máximo, esto es porque el punto x_0 no fue bien elegido dado que el hessiano de f es definido negativa en el intervalo $(-2,2)$.

Nota de corrección 0,5 si responden que no y 1 punto si hacen bien el análisis del ejemplo y concluyen que en este caso converge al máximo

3- a) Un ejemplo puede ser: Problema infactible:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a } x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 8 \end{aligned}$$

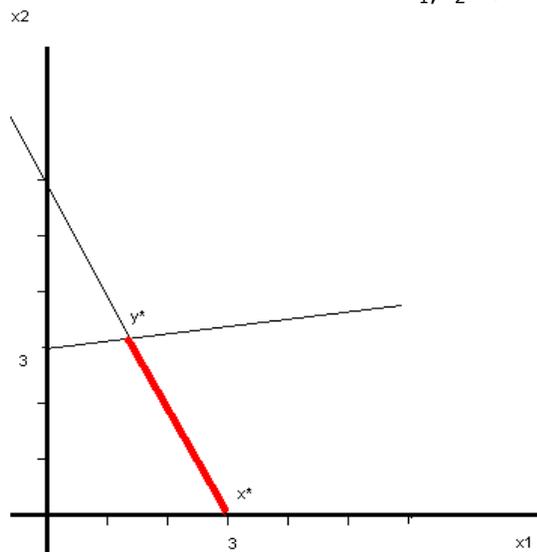


Nota de corrección 0,5 para el ejemplo y 0,5 para el grafico.

b) Si, esto puede suceder cuando la pendiente de la función objetivo tiene el mismo valor que la pendiente de una de las restricciones. (son paralelas)

Un ejemplo que cumpla con la condición anterior y está bueno puede ser:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a } -x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Nota de corrección 0,5 si responden que si y 0,5 si esta bien el ejemplo.

En el ejemplo deben dar explícitamente algún punto no vértice que sea óptimo.

Problema 2

A) Dado el siguiente problema (P):

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2) = -(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 5)^2 \\ \text{s.a} \quad & 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a. Desarrolle las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para el problema (P).

Solución

Las condiciones de KKT las podemos referir a lo siguiente.

- i. Poner el problema en forma estándar.
- ii. Ver relaciones de holgura.
- iii. Analizar regularidad del punto.

i. En este caso podemos ver que el problema no se encuentra en forma estándar por lo que debemos dejarlo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min \quad & -f(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 \\ \text{s.a} \quad & g_1(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2 - 12 \leq 0 \\ & g_2(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 - 12 \leq 0 \\ & g_3(x_1, x_2) = -x_1 \leq 0 \\ & g_4(x_1, x_2) = -x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos analizar los otros puntos.

ii. Ver las relaciones de holgura. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mu_1 * (4x_1 + 3x_2 - 12) &= 0 \\ \mu_2 * (3x_1 + 4x_2 - 12) &= 0 \\ \mu_3 * (-x_1) &= 0 \\ \mu_4 * (-x_2) &= 0 \end{aligned}$$

iii. El análisis de regularidad del punto se refiere a:

$$\nabla f = (2(x_1 - 5), 2(x_2 - 5))$$

$$\nabla g_1 = (4, 3)$$

$$\nabla g_2 = (3, 4)$$

$$\nabla g_3 = (-1, 0)$$

$$\nabla g_4 = (0, -1)$$

$$(2(x_1 - 5), 2(x_2 - 5)) + \mu_1(4, 3) + \mu_2(3, 4) + \mu_3(-1, 0) + \mu_4(0, -1) = (0, 0)$$

**b. Revisa el cumplimiento de las condiciones KKT para los siguientes puntos:
(1,1); (1, 9/4); (12/7, 12/7).**

Solución

Analizaremos para cada uno de los siguientes puntos las condiciones ii y iii del punto anterior.

- A(1,1)

Analizamos la actividad de las restricciones:

$$g_1(1,1) = -5 \neq 0 \rightarrow \mu_1 \in \mathbb{R}$$

$$g_2(1,1) = -5 \neq 0 \rightarrow \mu_2 \in \mathbb{R}$$

$$g_3(1,1) = -1 \neq 0 \rightarrow \mu_3 \in \mathbb{R}$$

$$g_4(1,1) = -1 \neq 0 \rightarrow \mu_4 \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto de esto concluimos que, en iii:

$$(-8, -8) = (0, 0) \rightarrow \leftarrow$$

Lo que claramente es una contradicción, por lo tanto el punto (1,1) no cumple con las condiciones de KKT.

- B(1, 9/4)

Analizamos la actividad de las restricciones:

$$g_1(1, 9/4) = -5/4 \neq 0 \rightarrow \mu_1 = 0$$

$$g_2(1, 9/4) = 0 \rightarrow \mu_2 \in \mathbb{R}$$

$$g_3(1, 9/4) = -1 \neq 0 \rightarrow \mu_3 = 0$$

$$g_4(1, 9/4) = -9/4 \neq 0 \rightarrow \mu_4 = 0$$

Por lo tanto de esto concluimos que, en iii:

$$(-8, -11/2) + \mu_2(3, 4) = (0, 0)$$

De esto podemos ver que el sistema que debemos resolver es:

$$\begin{aligned} -8 + 3\mu_2 &= 0 \rightarrow \mu_2 = 8/3 \\ -11/2 + 4\mu_2 &= 0 \rightarrow \mu_2 = 11/8 \end{aligned}$$

Con lo cual es fácil concluir que no existe un μ_1 que cumpla con ese sistema.

Por lo tanto el punto $(1, 9/4)$ no cumple con las condiciones de KKT.

- $C(12/7, 12/7)$

Analizamos la actividad de las restricciones:

$$\begin{aligned} g_1(12/7, 12/7) &= 0 && \rightarrow \mu_1 \in \mathbb{R} \\ g_2(12/7, 12/7) &= 0 && \rightarrow \mu_2 \in \mathbb{R} \\ g_3(12/7, 12/7) &= -12/7 \neq 0 && \rightarrow \mu_3 = 0 \\ g_4(12/7, 12/7) &= -12/7 \neq 0 && \rightarrow \mu_4 = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto de esto concluimos que, en iii):

$$(-46/7, -46/7) + \mu_1(4, 3) + \mu_2(3, 4) = (0, 0)$$

De esto podemos ver que el sistema que debemos resolver es:

$$\begin{aligned} -46/7 + 4\mu_1 + 3\mu_2 &= 0 \\ -46/7 + 3\mu_1 + 4\mu_2 &= 0 \\ \rightarrow \mu_1 &= 46/84 \\ \rightarrow \mu_2 &= 46/84 \end{aligned}$$

Encontramos μ_i 's que fuesen positivos que cumplieran con el sistema de ecuaciones planteados.

Podemos decir que el punto $(12/7, 12/7)$ cumple con las condiciones de KKT.

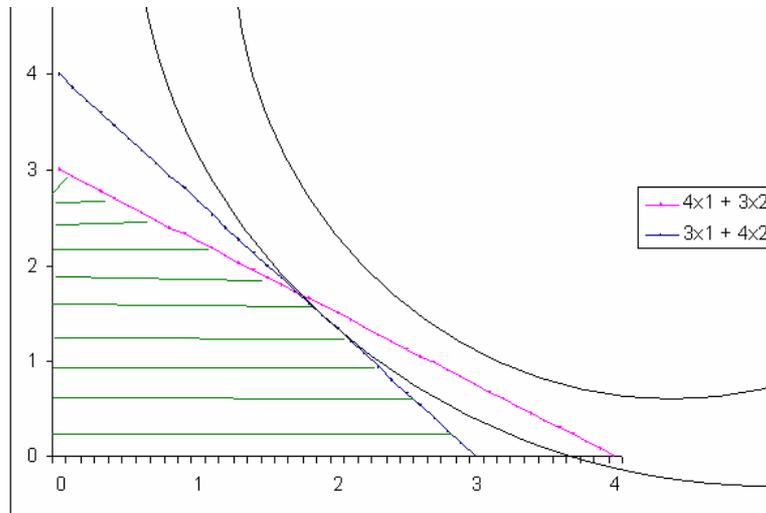
c. ¿Qué podemos concluir para cada uno de estos puntos? Justifique.

Solución

Punto	Condición KKT	Justificación
A(1,1)	No Cumple	Podemos ver que el punto en cuestión corresponde a un punto interior en el espacio de soluciones factibles. Dado que el gradiente de la función es no nulo, la condición de KKT no se cumple. Por lo tanto este punto interior no es candidato a óptimo.
B(1, 9/4)	No Cumple	Este punto hace activa la restricción 2. Por lo tanto podemos ver que no es óptimo porque existen direcciones factibles de mejoramiento, en particular en la dirección de la misma restricción.
C(12/7, 12/7)	Si Cumple	Este punto cumple con las condiciones de KKT, por lo tanto es candidato a óptimo. Este punto corresponde al punto de intersección de las dos restricciones. Por lo tanto es candidato a ser óptimo global, lo cual se asegura por la convexidad del problema.

d. Muestre las restricciones, el conjunto de soluciones factibles y la función objetivo gráficamente.

Solución



e. De la solución óptima y el valor de la función objetivo asociado.

Solución

La solución óptima es el punto $(12/7, 12/7)$ y el valor de la función objetivo es $f(x_1=12/7, x_2=12/7) = (12/7 - 5)^2 + (12/7 - 5)^2 = 1058/49 = 21.59$

B) Supongamos que la función objetivo del problema (P) cambia como lo muestra el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a. Revisa el cumplimiento de las condiciones KKT de (P1) para los siguientes puntos: $(1,1)$; $(1, 9/4)$; $(12/7, 12/7)$.

Solución

$$\nabla f = (-4, -3)$$

$$\nabla g_1 = (4, 3)$$

$$\nabla g_2 = (3, 4)$$

$$\nabla g_3 = (-1, 0)$$

$$\nabla g_4 = (0, -1)$$

- A(1,1)

Analizamos la actividad de las restricciones:

$$g_1(1,1) = -5 \neq 0 \rightarrow \mu_1 \in \mathbb{R}$$

$$g_2(1,1) = -5 \neq 0 \rightarrow \mu_2 \in \mathbb{R}$$

$$g_3(1,1) = -1 \neq 0 \rightarrow \mu_3 \in \mathbb{R}$$

$$g_4(1,1) = -1 \neq 0 \rightarrow \mu_4 \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto de esto concluimos que, en iii:

$$(-4,-3) = (0,0)$$

Lo que claramente es una contradicción, por lo tanto el punto (1,1) no cumple con las condiciones de KKT.

Este punto no se ve afectado puesto que es un punto interior.

- B(1, 9/4)

Analizamos la actividad de las restricciones:

$$g_1(1, 9/4) = -5/4 \neq 0 \rightarrow \mu_1 = 0$$

$$g_2(1, 9/4) = 0 \rightarrow \mu_2 \in \mathbb{R}$$

$$g_3(1, 9/4) = -1 \neq 0 \rightarrow \mu_3 = 0$$

$$g_4(1, 9/4) = -9/4 \neq 0 \rightarrow \mu_4 = 0$$

Por lo tanto de esto concluimos que, en iii:

$$(-4,-3) + \mu_2(3,4) = (0,0)$$

De esto podemos ver que el sistema que debemos resolver es:

$$-4 + 3\mu_2 = 0 \rightarrow \mu_1 = 4/3$$

$$-3 + 4\mu_2 = 0 \rightarrow \mu_1 = 3/4$$

Con lo cual es fácil concluir que no existe un μ_1 que cumpla con ese sistema.

Por lo tanto el punto (1, 9/4) no cumple con las condiciones de KKT.

- C(12/7,12/7)

Analizamos la actividad de las restricciones:

$$g_1(12/7,12/7) = 0 \rightarrow \mu_1 \in \mathbb{R}$$

$$g_2(12/7,12/7) = 0 \rightarrow \mu_2 \in \mathbb{R}$$

$$g_3(12/7,12/7) = -12/7 \neq 0 \rightarrow \mu_3 = 0$$

$$g_4(12/7,12/7) = -12/7 \neq 0 \rightarrow \mu_4 = 0$$

Por lo tanto de esto concluimos que, en iii:

$$(-4,-3) + \mu_1(4,3) + \mu_2(3,4) = (0,0)$$

De esto podemos ver que el sistema que debemos resolver es:

$$-4 + 4\mu_1 + 3\mu_2 = 0$$

$$-3 + 3\mu_1 + 4\mu_2 = 0$$

$$\rightarrow \mu_1 = 1$$

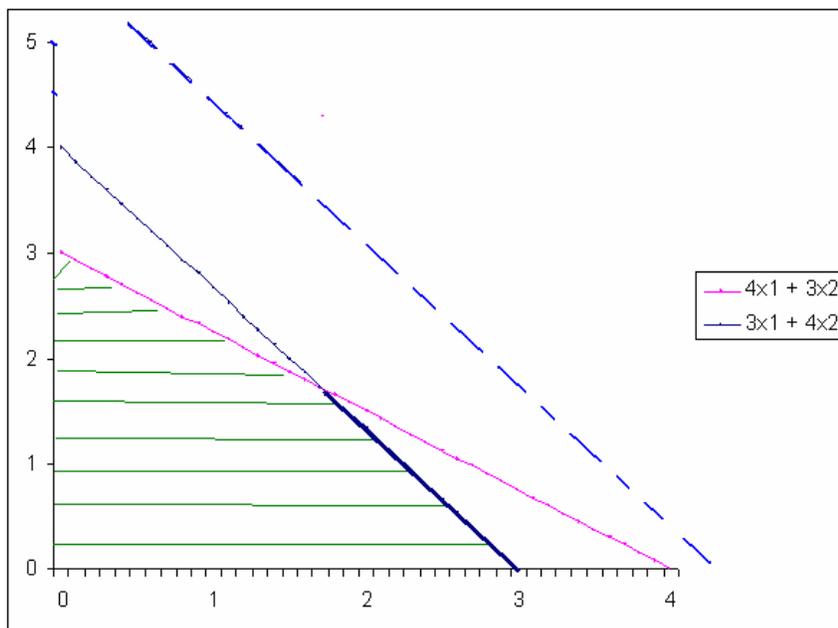
$$\rightarrow \mu_2 = 0$$

Encontramos μ_i 's que fuesen positivos que cumplieran con el sistema de ecuaciones planteados.

Podemos decir que el punto $(12/7, 12/7)$ cumple con las condiciones de KKT.

b. Muestre las restricciones, el conjunto de soluciones factibles y la función objetivo gráficamente.

Solución



Problema 3

Los auxiliares de un curso de optimización de una universidad de gran prestigio han decidido, para hacer un bien a los alumnos de su facultad, abrir una agencia de citas.

La cantidad de inscritos en la agencia es de $M+N$ siendo M la cantidad de mujeres y N la cantidad de hombres. Se tiene, dadas las características demográficas de la facultad, que $N>M$.

Todos los inscritos se "ubican" entre ellos (solo de vista) y han informado confidencialmente a la agencia que la preferencia de una mujer m por emparejarse con un hombre n es de PM_{mn} y la preferencia de un hombre n por emparejarse con una mujer m es de PH_{nm} .

Adicionalmente a cada inscrito se le hace un test de personalidad y mediante un estudio, profundo y 100% certero, se determina si existirá compatibilidad entre cada combinación de parejas, obteniendo valores C_{mn} que serán 1 si la pareja del hombre n con la mujer m es compatible y 0 si la pareja no es compatible. Cada persona es compatible con al menos una pareja.

La agencia debe decidir a qué actividades enviar a cada pareja durante su cita (ej: ir al cine, a comer, etc) para esto la agencia cuenta con una variedad de A actividades y con un presupuesto fijo dado por $PSPTO$ y se sabe que en cada actividad a la mujer m gastará G_{ma} dependiendo del nivel de gasto al que esté habituado la mujer y se sabe que un hombre gasta K_a si realiza la actividad a , este gasto es igual para todos los hombres. Se tiene además que cada pareja no puede realizar más de tres actividades en su cita.

La preferencia de un hombre n por hacer la actividad a está dada por SH_{na} y la preferencia de una mujer m por hacer la actividad a está dada por SM_{ma} .

Se sabe que una persona solo puede ser asignada una sola vez, que todas las mujeres deben tener pareja y que una actividad no se realizará dos veces por la misma pareja.

Los auxiliares del curso han decidido solicitar ayuda a sus alumnos pidiéndole a cada uno que formule un modelo de programación lineal entera para la primera ronda de citas, que maximice el nivel de satisfacción de preferencias.

Solución:

Variables:

X_{mn} 1 si se asigna la pareja del hombre n y la mujer m
0 si no

Y_{mn} 1 se asigna la actividad a a la pareja formada por el hombre n y la mujer m
0 si no

Restricciones

1.- A cada hombre se le asigna a lo más una mujer.

$$\sum_{m=1}^M X_{mn} \leq 1 \quad \forall n = 1, \dots, N$$

2.- A cada mujer se le asigna exactamente un hombre.

$$\sum_{n=1}^N X_{mn} = 1 \quad \forall m = 1, \dots, M$$

3.- No se asigna si no hay compatibilidad.

$$X_{mn} \leq C_{mn} \quad \forall n = 1, \dots, N, m = 1, \dots, M$$

4.- Solo se puede tener actividades si se sale en la cita y las actividades no son más de tres.

$$\sum_{a=1}^A Y_{mna} \leq 3 \cdot X_{mn} \quad \forall n = 1, \dots, N, m = 1, \dots, M$$

Esta restricción también se puede separa en estas dos restricciones:

$$Y_{mna} \leq X_{mn} \quad \forall n = 1, \dots, N, m = 1, \dots, M, a = 1, \dots, A$$

$$\sum_{a=1}^A Y_{mna} \leq 3 \quad \forall n = 1, \dots, N, m = 1, \dots, M$$

5.- No se pueden pasar del presupuesto para citas

$$\sum_{a=1}^A \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M [(G_{ma} + K_a) \cdot Y_{mna}] \leq PSPTO$$

6.- Naturaleza de las variables.

$$X_{mn}, Y_{mna} \in \{0,1\} \quad \forall n = 1, \dots, N, m = 1, \dots, M, a = 1, \dots, A$$

Función Objetivo:

$$\max z = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [(PM_{mn} + PH_{mn}) \cdot X_{mn}] + \sum_{a=1}^A \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [(SH_{na} + SM_{ma}) \cdot Y_{mna}]$$

Nota de corrección:

0.8 por cada variable

1.2 por la función objetivo

0.5 por las restricciones 1, 2, 3, 6

0.6 por las restricciones 4,5