



Control #1

I. Una línea aérea debe cargar un avión que tiene m bodegas. En la bodega j se puede cargar un peso máximo P_j y tiene un volumen total disponible V_j .

En este avión se pueden cargar n productos distintos. La disponibilidad del producto i es D_i y su volumen por unidad de peso es v_i . El beneficio unitario por transportar una unidad de peso del producto i es b_i .

Por razones de estabilidad del avión, luego de cargado, en todas las bodegas se debe tener el mismo cociente entre el peso total cargado y peso máximo o capacidad de la bodega.

Con estos antecedentes construya un modelo de programación lineal que permita determinar cómo se debe cargar cada una de las bodegas del avión de tal modo que se maximice el beneficio del vuelo.

II.

a) Suponga un problema de producción cuya función objetivo maximiza beneficios y tiene la siguiente expresión:

$$\text{Max } z = \sum_{j=1}^m b_j x_j$$

b_j : beneficio unitario del producto j
 x_j : cantidad a producir del producto j

El beneficio unitario b_j es la diferencia entre el precio de venta y el costo unitario de producción.

Analice si la función objetivo representa exactamente el beneficio por obtener o bien tiene algún grado de aproximación. Justifique su respuesta.

- b) Explique por qué los procedimientos del gradiente y Newton son métodos de solución.
- c) Indique que ocurre si al aplicar el método de Newton se llega a un punto de inflexión con gradiente nulo.
- d) Sea el problema:

Min $f(x)$

s.a $g_i(x) \leq 0 \quad i=1, \dots, m$

Justifique o rechace las siguientes afirmaciones:

- 1.- Un óptimo regular debe cumplir las condiciones necesarias de Kuhn - Tucker.
- 2.- Un óptimo no regular debe cumplir las condiciones necesarias de Kuhn - Tucker.
- 3.- Un punto interior del espacio de soluciones factibles con gradiente nulo cumple las condiciones de Kuhn - Tucker.
- 4.- Nunca un punto factible que no sea óptimo local o global puede cumplir las condiciones de Kuhn - Tucker.

III. Considere el siguiente problemas de optimización

Min $f(x, y) = x.y$

s.a

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 \geq 4$$

$$x - y \leq 2$$

- a) ¿La función f es convexa?
- b) Determine gráficamente el conjunto de puntos factibles. ¿Es convexo?
- c) Establezca las condiciones de Kuhn - Tucker.
- d) Verifique si se cumplen en los siguientes puntos: $(\sqrt{2} - 2, 2 - \sqrt{2})$, $(1, -1)$, $(0, 2)$
- e) ¿Cuales de estos puntos pueden ser óptimos globales del problemas?

IV. Una empresa productora de cerveza dispone de una nueva línea de producción para llenar sus botellas de 0.33 l. Se desea diseñar un plan de embotellamiento y manejo de inventario para las próximas T periodos. Las condiciones del problema son las siguientes:

- Se debe satisfacer la demanda para cada período t , que es conocida e igual a d_t , $t=1, \dots, T$.
- La línea dispone de capacidad suficiente para producir toda la demanda ($d_1 + \dots + d_T$) en un sólo período, pero si hay producción en el período t , se tiene que llenar al menos L botellas en este período.
- Los costos más importantes son:
 - p_t = costo unitario de producción en el período t , $t=1, \dots, T$
 - h_t = costo unitario de manutención del inventario en el período t , $t=1, \dots, T$. El costo del inventario se calcula en base a la cantidad de inventario al final de cada período.
 - f_t = costo fijo de producción en el período t , $t=1, \dots, T$.
 - g_t = Costo fijo si el período t es el primero de una serie de uno o más periodos seguidos de producción. Este costo ocurre cuando hay producción en el período $t-1$, y se debe a la necesidad de lavar la maquinaria después de un período de inactividad.
- Condiciones iniciales: Al inicio del primer período la línea de producción esta inactiva y el inventario es cero.

Plantee un modelo de programación lineal mixta que permita determinar que cantidad se debe producir en cada período, y cuanto se debe guardar en cada período de tal manera a minimizar los costos totales.

Pregunta

$x_{i,j}$: cantidad del producto i a cargar en la bodega j $i=1, \dots, n$
 $j=1, \dots, m$

Función Objetivo:

$$\max z = \sum_{i=1}^n b_i \sum_{j=1}^m x_{i,j}$$

Restricciones:

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} \leq P_j \quad j=1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^n v_i x_{i,j} \leq V_j \quad j=1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^m x_{i,j} \leq D_i \quad i=1, \dots, n$$

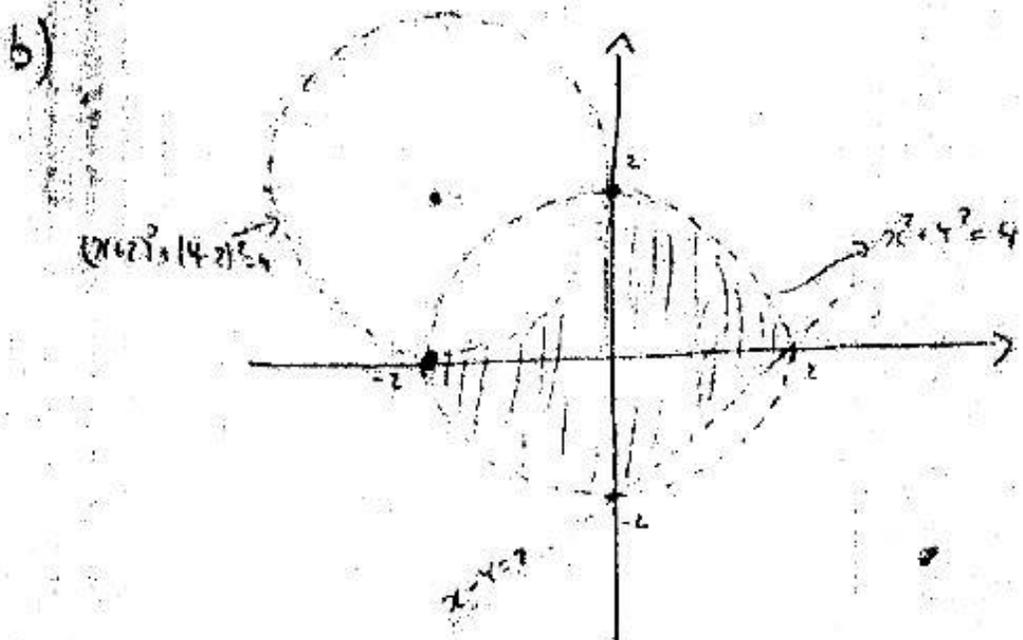
$$\frac{\sum_{i=1}^n x_{i,j}}{P_j} - \frac{\sum_{i=1}^n x_{i,j+1}}{P_{j+1}} = 0 \quad j=1, \dots, m-1$$

$$x_{i,j} \geq 0$$

Pregunta:

- a) El precio de venta no siempre es el mismo, varía en la práctica de acuerdo a la cantidad vendida. El costo de producción unitario también varía, por ejemplo, depende del costo de las distintas materias primas que se utilizan. Estos costos pueden cambiar de una compra a otra de materias primas.
- b) Estos dos procedimientos no aseguran encontrar la solución óptima en un número finito de pasos. Es la definición de ese método.
- c) El método de Newton al encontrar un punto de gradiente nulo no vale de él. Por tanto en este caso no se encontraría la solución óptima y tampoco se obtendrían puntos que se aproximarán a ella.
- d) 1.- Las condiciones de Kuhn-Tucker son necesarias para un óptimo regular. Luego debe cumplirse.
- 2.- Si el óptimo no es regular los gradientes de las restricciones activas no son l.i. Luego:
$$\nabla f(x) + \sum_i \mu_i \nabla g_i(x) = 0$$
no se cumplirá.
- 3.- Se trata de un punto factible. Luego $g_i(x) < 0 \quad \forall i$. Por tanto $\mu_i g_i(x) = 0$ se cumple para $\mu_i = 0 \quad \forall i$. Si $\nabla f(x) = 0$, la relación
$$\nabla f(x) + \sum_i \mu_i \nabla g_i(x) = 0$$
se cumple.
Luego este punto cumple Kuhn-Tucker.
- 4.- Pueden existir puntos factibles que cumplan las condiciones de Kuhn-Tucker. Estas condiciones son necesarias y no suficientes.

a) No es convexa, la matriz hessiana $H_f = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ no es semidefinida positiva.



No es convexo. Por ejemplo, los puntos $(-2, 0)$ y $(0, 2)$ son factibles pero el segmento de línea que los une no está contenido en el conjunto factible.

c) El problema es equivalente a

$$\begin{aligned} \text{min } & x - y \\ \text{s.t. } & x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \\ & 4 - (x+2)^2 - (y-2)^2 \leq 0 \\ & x - y - 2 \leq 0 \end{aligned}$$

condiciones de KKT

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -2(x+2) \\ -2(y-2) \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \quad \lambda_1(x^2 + y^2 - 4) = 0, \quad \lambda_2(4 - (x+2)^2 - (y-2)^2) = 0, \quad \lambda_3(x - y - 2) = 0$$

a) $(\sqrt{2}-2, 2-\sqrt{2})$:

restricciones activas: $4 - (x+z)^2 - (y-z)^2 \leq 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -(2-\sqrt{2}) \\ -(2-\sqrt{2}) \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} -2(\sqrt{2}-2+2) \\ -2(2-\sqrt{2}-2) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2+\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}+2 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} > 0$$

Se cumplen las condiciones KKT en el punto $(\sqrt{2}-2, 2-\sqrt{2})$

$(1, -1)$:

restricciones activas: $x+y-z \leq 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda_3 = 1 > 0$$

Se cumplen las condiciones KKT en el punto $(1, -1)$

$(0, 2)$:

restricciones activas: $x^2+y^2-4 \leq 0, 4 - (x+z)^2 - (y-z)^2 \leq 0$

$$\Rightarrow \lambda_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -2(0+2) \\ -2(2-2) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2 > 0$$

Se cumplen las condiciones KKT en el punto $(0, 2)$

e) Todas estas puntos cumplen las condiciones de KKT. Se tiene

$$f(\sqrt{2}-2, 2-\sqrt{2}) = -(2-\sqrt{2})^2 \approx -0.343$$

$$f(1, -1) = -1$$

$$f(0, 2) = 0$$

Y $0 > -(2-\sqrt{2})^2 > -1$. Por lo tanto, $(\sqrt{2}-2, 2-\sqrt{2})$ no son mínimos globales. El único punto que puede ser óptimo global es $(1, -1)$

P4/

Pauta

Variables

x_t = cantidad (botellas) producidas en periodo t , $t=1, \dots, T$

I_t = inventario (botellas) al final del periodo t , $t=1, \dots, T$

$Y_t = \begin{cases} 1 & \text{si hay producción en periodo } t \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad t=2, \dots, T$

$Z_t = \begin{cases} 1 & \text{si el periodo } t \text{ es el primero de una} \\ & \text{serie de periodos requeridos de producción} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad t=2, \dots, T$

Sean los parámetros

$I_0 = 0$, $Y_0 = 0$, M muy grande positivo.

$$\min z = \sum_{t=1}^T p_t x_t + \sum_{t=1}^T h_t I_t + \sum_{t=1}^T l_t Y_t + \sum_{t=1}^T g_t Z_t$$

$$I_{t-1} + x_t = d_t + I_t \quad t=1, \dots, T$$

$$L_t Y_t \leq x_t \leq M Y_t \quad t=1, \dots, T$$

$$Z_t \geq Y_t - Y_{t-1} \quad t=1, \dots, T$$

$$x_t \geq 0, I_t \geq 0 \quad t=1, \dots, T$$

$$Y_t = 0, 1, Z_t = 0, 1 \quad t=1, \dots, T$$