Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A Optimización
Semestre Otoño 2005

Profesor: Guillermo Duran
Richard Weber

Auxiliares: Blas Duarte
Marianela Pereira

Auxiliar Nº 2
Pauta
23 de Marzo de 2005

Pregunta 1

1. Responda las siguientes preguntas sobre Complejidad:
a) Suponga que tiene un algoritmo exponencial para resolver en forma exacta un problema de decisión Q. Puede afirmar que el problema Q no pertenece a la clase de problemas P (problemas polinomiales)? Justifique la respuesta.
b) Sea un problema Q perteneciente a la clase de problemas NP. Puede afirmar que no existe un algoritmo polinomial que resuelva en forma exacta el problema Q? Justifique la respuesta.
c) Sea un problema Q perteneciente a la clase de problemas NP-completos. Puede afirmar que no existe un algoritmo polinomial que resuelva en forma exacta el problema Q? Justifique la respuesta.

2. Responda las siguientes preguntas de métodos de descenso:
a) Describa una iteración del Método del Gradiente y dé una justificación gráfica y/o conceptual de su funcionamiento.
b) Describa una iteración del Método de Newton y dé una justificación gráfica y/o conceptual de su funcionamiento.

Pauta Pregunta 1

Parte a
a. No. Porque podría existir otro algoritmo para resolver Q que sea polinomial.
b. No. Todos los problemas de P están en NP. Por lo tanto el problema Q podría ser cualquiera de los de P.
c. No. Es un problema abierto saber si existe algún algoritmo polinomial para cualquier problema de NP-completo.

Parte b

a. Las iteraciones del algoritmo se pueden resumir en:

$$x^{k+1} = x^k - \lambda_k \nabla f(x_k) \textbf{, donde } \lambda_k = \underset{\lambda}{Min}\ f(x^k - \lambda_k \nabla f(x^k))\textbf{.}$$

Explicar que nos vamos moviendo en la dirección del gradiente de la función, que es la de máximo descenso. Pueden hacer el dibujo que el punto se va moviendo perpendicular a las curvas de nivel de la función.

b. Las iteraciones del algoritmo se pueden resumir en

$$x^{k+1} = x^k - \left[H_{f(x^k)}\right]^{-1} \nabla f(x_k)$$

Explicar que nos movemos en la dirección de $-\left[H_{f(x^k)}\right]^{-1} \cdot \nabla f(x^k)$ –

que es de descenso cuando el hessiano es definido positivo (y eso pasa si la f es convexa).
También vale si explican que se aproxima la función por Taylor de orden 2 y en cada paso minimizan la aproximación

Pregunta 2

Sea el problema de minimización

$$\text{Min } f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Si x_1 y x_2 pueden tomar cualquier valor real, resolver el problema aplicando el método del gradiente. Para dicho efecto, tome como punto de partida el par (x_1 = 2; x_2 = 1).

Pauta Pregunta 2

Debemos resolver mín $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ con $\vec{x}_0 = (2, 1)$

- Método del gradiente: $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \lambda_k \nabla f(\vec{x}_k)$

  Claramente, antes de comenzar a iterar se requiere calcular $\nabla f(\vec{x})$:

  $$\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

  Ahora, comenzamos a iterar:

  - Iteración 1:
    - Vemos si estamos en el óptimo: $\nabla f(2,1) = (4,2) \neq \vec{0} \Rightarrow$ Seguimos.
    - Calculamos nuevo punto $\vec{x}_1$:

    $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda_0 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

    Para calcular λ_0 minimizamos $h(\lambda)$:

    $$\begin{aligned} h(\lambda) &= f(\vec{x}_0 - \lambda \nabla f(\vec{x}_0)) \\ &= f\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= (2-4\lambda)^2 + (1-2\lambda)^2 \\ \frac{dh(\lambda)}{d\lambda} &= 0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

    (Si quieren pueden verificar que el punto crítico es óptimo comprobando que $d^2h/d\lambda^2 > 0$)
    Entonces:

    $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  - Iteración 2:
    - Vemos si estamos en el óptimo: $\nabla f(0,0) = (0,0) = \vec{0} \Rightarrow$ Fin.

    $\therefore \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es el mínimo de $x_1^2 + x_2^2$

- Método de Newton: $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \{H_f(\vec{x}_k)\}^{-1} \nabla f(\vec{x}_k)$

  Claramente, antes de comenzar a iterar se requiere calcular $\nabla f(\vec{x})$ y $\{H_f(\vec{x})\}^{-1}$:

  $$\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

  $$H_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{H_f(\vec{x})\}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

  Ahora, comenzamos a iterar:

- Iteración 1:
  - Vemos si estamos en el óptimo: $\nabla f(2,1) = (4,2) \neq \vec{0} \Rightarrow$ Seguimos.
  - Calculamos nuevo punto $\vec{x}_1$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iteración 2:
  - Vemos si estamos en el óptimo: $\nabla f(0,0) = (0,0) = \vec{0} \Rightarrow$ Fin.
  - Calculamos nuevo punto $\vec{x}_1$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ También se concluye que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es el mínimo de $x_1^2 + x_2^2$

Pregunta 3

a. Considere el siguiente problema de optimización:

$$Min\ f(x_1; x_2) = x_1^2 + 2x_1 + 2x_2^2 + 3$$

Resolver utilizando el método del gradiente y de Newton. Tome como punto de partida el par:
($x_1 = 0;\ x_2 = 0$).
b. Mencione una ventaja y una desventaja del método de Newton frente al del gradiente.

Pauta Pregunta 3

1. Resolvamos el problema por los 2 Métodos:
   a) **Método del Gradiente:**

$$x^{k+1} = x^k - \lambda_k \nabla f(x^k)$$

Antes de comenzar a iterar se requiere calcular

$$\nabla f(x^k) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2 \\ 4x_2 \end{pmatrix}$$

Ahora, comenzamos a iterar:

- **Iteración 1:**
  - Vemos si estamos en el óptimo: $\nabla f(0,0) = (2,0) \neq (0,0) \Rightarrow$ Seguimos
  - Calculamos nuevo punto $\vec{x}_1$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular λ_0 minimizamos $h(\lambda)$:

$$\begin{aligned} h(\lambda) &= f(\vec{x}_0 - \lambda \nabla f(\vec{x}_0)) \\ &= f\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ &= (-2\lambda)^2 - 4\lambda + 0 + 3 \end{aligned}$$

$$\frac{dh(\lambda)}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{1}{2}$$

(para comprobar que el punto crítico es óptimo comprobar que $\frac{d^2h(\lambda)}{d\lambda^2} > 0$)
Entonces:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Iteración 2:**

  - Vemos si estamos en el óptimo: $\nabla f(-1,0) = (0,0) \Rightarrow$ FIN

  $\therefore$ El mínimo de la función es $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. **Método de Newton:**

$$x^{k+1} = x^k - [Hf(x^k)]^{-1}\nabla f(x^k)$$

Antes de comenzar a iterar se requiere calcula $\nabla f(x^k)$ y $[Hf(x^k)]^{-1}$

$$\nabla f(x^k) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2 \\ 4x_2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(x^k) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow [Hf(x^k)]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Ahora, comenzamos a iterar:

- **Iteración 1:**
  - Vemos si estamos en el óptimo: $\nabla f(0,0) = (2,0) \neq (0,0) \Rightarrow$ Seguimos
  - Calculamos nuevo punto $\vec{x}_1$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Iteración 2:**

- Vemos si estamos en el óptimo: $\nabla f(-1,0) = (0,0) \Rightarrow$ FIN

$\therefore$ También se concluye que el mínimo de la función es $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Veamos una ventaja y una desventaja (no son las únicas):

- **Ventaja:** El metodo del gradiente presenta un comportamiento más lento que Newton a medida que se acerca al óptimo.
- **Desventaja:** Requiere partir de un punto cercano al óptimo y además necesita una matriz hessiana invertible.

Dudas y Comentarios a:
bduarte@ing.uchile.cl
mapereir@ing.uchile.cl