

Universidad de Chile  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A : Optimización  
Profesores: Natalia Yanković - Guillermo Durán  
Patricio Conca  
Auxiliares: Alejandro Cataldo - Giovanni Medina  
Francisco González - Sebastián Souyris

## EXAMEN OTOÑO 2003

DURACIÓN: 3 HORAS.

### Problema sobre materia del curso

Responda las siguientes preguntas. Justifique claramente sus respuestas (1 punto cada una).

1. Indique por qué es necesario validar un modelo matemático. Explique como se realiza en la práctica la validación.
2. Demuestre que un punto interior del espacio de soluciones factibles no puede ser solución óptima de un problema de programación lineal continua, en el cual no todos los costos asociados a la función objetivo son nulos.
3. Explique como puede resolverse un sistema de ecuaciones lineales aplicando el algoritmo simplex.
4. Discuta si tiene o no sentido plantear el concepto de precio sombra en un problema de programación lineal entera.
5. Explique si puede o no tener utilidad ocupar el concepto de dualidad para resolver cada uno de los problemas lineales continuos que se van definiendo en el algoritmo de ramificación y acotamiento (Branch and Bound).
6. Suponga que en el problema de flujo máximo por una red se incorporan capacidades máximas en los nodos. Modifique la red para poder aplicar el algoritmo de Ford-Fulkerson. Se entiende por capacidad de un nodo al máximo flujo que puede pasar por él. Gráficamente se puede observar en el siguiente ejemplo, donde se entrega la capacidad de los arcos y del nodo en cuestión.

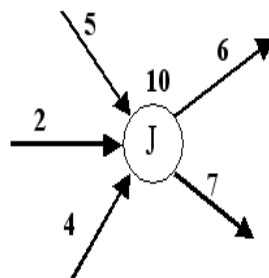


Figura 1: Ejemplo.

## Problema de Análisis de Sensibilidad y Dualidad

Suponga que es el gerente de producción de una compañía que fabrica caramelos. Esta empresa fabrica tres tipos de productos diferentes, las que sólo se diferencian en las cantidades de *chocolate* y *azúcar* necesarias para su fabricación, información que se proporciona en la siguiente tabla.

	Cantidad de Azúcar (kilos)	Cantidad de Chocolate (kilos)	Ganancias [\$]
Producto 1	1	2	3
Producto 2	1	3	7
Producto 3	1	1	5

La disponibilidad de chocolate para la producción es de 100 kilos, mientras que la disponibilidad de azúcar es de 50 kilos.

1. (0,5 pts) Formule un modelo de programación lineal que permita encontrar los niveles de producción que maximicen las ganancias de la compañía.
2. (1,5 punto) ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por aumentar marginalmente las disponibilidades de azúcar y chocolate?. Interprete económicamente el dual de este problema de optimización.  
Hint: Puede ser de utilidad plantear y resolver el problema dual.
3. (1 punto) Utilizando la información de la pregunta anterior determine los niveles de producción óptimos.
4. (1 punto) ¿Para qué valores de la ganancia asociada al producto 1, la base óptima no cambia?.
5. (1 punto) Si se dispusiera de 60 kilos de azúcar, ¿Cuál sería la producción óptima?. ¿Cuánto serían las ganancias que la empresa obtendría en esta situación?.
6. (1 punto) Considere que ahora puede fabricar un cuarto producto, que reporta una utilidad de 17 [\$] y requiere de 3 kilos de azúcar y 4 kilos de chocolate para su fabricación. Compare cualitativamente las ganancias que tendría respecto a la situación inicial. ¿Tendría que fabricar esta empresa producto tipo 4 en su plan de producción óptimo?.  
OJO: no se está pidiendo que de los valores de una posible nueva solución.

## Problema de Modelación Lineal Entera

El inminente inicio de las eliminatorias sudamericanas para el Mundial de Fútbol de Alemania 2006, con el partido de “la roja” el próximo 7 de septiembre en Buenos Aires contra la poderosa selección trasandina, tiene muy preocupado al técnico Juvenal Olmos. Como no quiere dejar ningún detalle librado al azar, ha decidido contratar a Giuseppe Mandinga, director de la consultora de Armijo Catalán y principal especialista chileno en programación entera, para que lo asesore en la confección de un modelo que entregue información que pueda ayudar a “la roja” en su objetivo de llegar a Alemania 2006. Luego de darle vueltas al problema, Mandinga no ha podido resolver el problema que tiene entre manos y conociendo el mal humor de Armijo, ha decidido recurrir a los alumnos de Optimización de la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile para que lo apoyen. Para esto, usted debe recordar que las eliminatorias son jugadas por 10 equipos, que los 4 primeros clasifican para Alemania y que el sistema es de partido y revancha (ida y vuelta). La asignación de puntaje es: 3 puntos por victoria y 1 punto por empate. Con esta información se le pide:

1. Diseñe un modelo de programación entera que antes de realizada la primera fecha de las eliminatorias indique cuál es la mayor cantidad de puntos con que la escuadra chilena **puede no clasificar** para Alemania 2006. (4 PUNTOS)
2. Si una vez concluída la primera fecha “la roja” logra ganar<sup>1</sup> a la ya no tan poderosa selección trasandina, como incorporaría ésta información al modelo. ¿Y si el resultado fuese un empate? (1 punto)
3. Una vez resuelto el modelo para una fecha determinada de la eliminatoria, qué respuesta le daría a Juvenal Olmos si éste quiere saber con cuántos puntos tiene Chile garantizada su clasificación. (1 punto)

**Sugerencia:** puede utilizar dentro del modelo una variable para cada equipo rival de Chile que valga 1 si el conjunto tiene igual o más puntos que la “roja” en ese momento, y 0 en caso contrario.

### Problema de ruta más corta

El algoritmo de Dijkstra permite calcular la ruta más corta para ir desde un nodo inicial hacia todos los demás nodos de una red determinada.

1. ¿Cómo modificaría una red dada si le pidieran que aplique el algoritmo de Dijkstra, una única vez, para encontrar las rutas más cortas desde cada uno de los nodos de la red hacia un nodo inicial? Aplíquelo a resolver el problema en la siguiente red donde el nodo inicial es el 5. (2 PUNTOS)

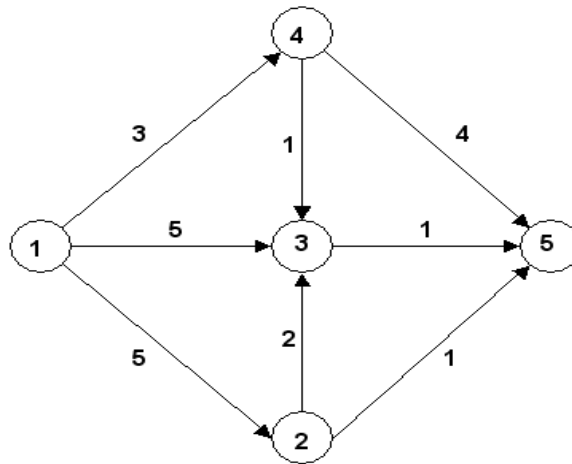


Figura 2: Red asociada al problema.

2. ¿Cómo resolvería de manera simple el problema de calcular las rutas más cortas entre cualquier par de nodos? (1 PUNTO)
3. ¿Porqué el algoritmo de Dijkstra puede no funcionar correctamente si hay algún arco con longitud negativa? Entregue un ejemplo donde el algoritmo falle sin que existan circuitos de longitud negativa. (3 puntos)

---

<sup>1</sup>Imaginemos un 2 a 0 a favor, goles de Armijo Catalán y Giovanni Mandinga.