



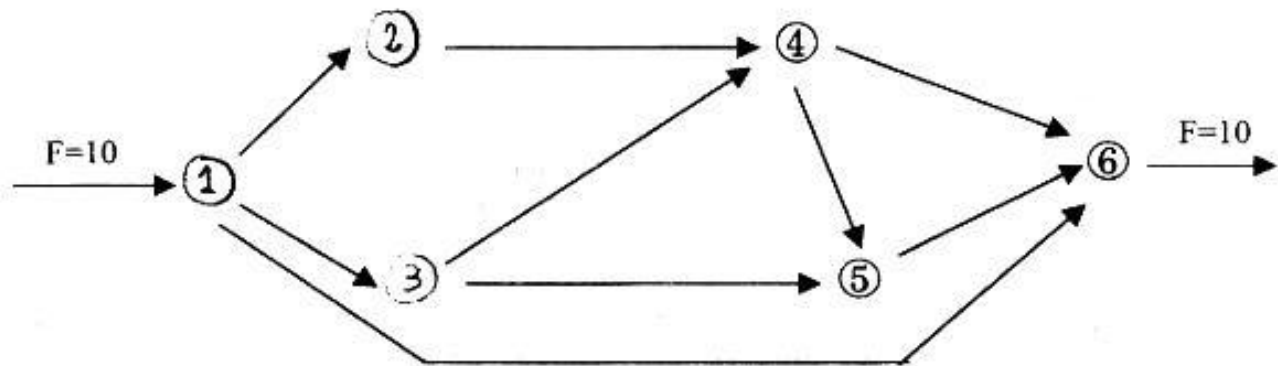
## EXAMEN IN34A

- I. Una central eléctrica tiene tres calderas ( $i=1,2,3$ ). Si se usa la caldera  $i$ , se podrá producir una cantidad de vapor (en toneladas) que varía entre el mínimo ( $m_i$ ) y el máximo ( $M_i$ ). Si hay producción en la caldera  $i$ , se incurre un costo fijo de  $f_i$  unidades monetarias, además del costo de  $p_i$  unidades monetarias por tonelada de vapor producido.
- El vapor de las calderas se usa para producir energía en tres turbinas ( $j=1,2,3$ ). La turbina  $j$  puede procesar una cantidad de vapor (en toneladas) entre el mínimo ( $n_j$ ) y máximo ( $N_j$ ). Cuando se usa la caldera 1 no se puede usar la turbina 3.
- El costo fijo de utilización de la turbina  $j$  es de  $g_j$  unidades monetarias, y por cada tonelada de vapor procesado en esta turbina se obtiene  $l_j$  kwh de energía, con un costo de  $q_j$  unidades monetarias por kwh. Se pretende producir al menos  $D$  kwh de energía.
- Plantee un modelo de programación lineal mixta que permita determinar que calderas utilizar, la cantidad de vapor a producir en cada una de ellas, que turbinas utilizar y la cantidad de energía a producir en cada una de ellas, minimizando los costos totales de producción.
- II.
- Indique si la convexidad del espacio de soluciones factibles en programación lineal da sustento o no al criterio de optimalidad del algoritmo simplex.
  - Sea un problema lineal con óptimos alternativos. Se da una solución óptima en la cual sólo un precio sombra es positivo y todos los restantes son nulos. Ubique esta solución óptima en el espacio de soluciones factibles. Justifique su respuesta.
  - Señale la utilidad práctica de los precios sombra en un problema de programación lineal.
  - Sea  $x_j$ , variable no básica en la solución óptima de un problema lineal. Suponga que  $c_j$  cambia. Establezca bajo que condiciones cambian los precios sombra y en que circunstancias no cambian.
  - Explique por qué el número de iteraciones efectuadas por el algoritmo simplex es finito en un problema sin degeneración.

f) Justifique o rechace la siguiente afirmación:

“Para que un problema lineal tenga óptimos alternativos el gradiente de la función objetivo se debe poder expresar mediante un solo vector gradiente de alguna restricción.

III. Sea la siguiente malla



Al nodo 1 llega un flujo  $F=10$  que debe ser transportado por la malla hasta el nodo 6.

La información de costos unitarios de transporte y de capacidad se da en la tabla siguiente.

Arco	Costo unitario de transporte	Capacidad
(1,2)	8	3
(1,3)	5	11
(2,4)	5	6
(3,4)	3	2
(3,5)	1	10
(4,5)	3	5
(4,6)	1	5
(5,6)	2	9
(1,6)	25	15

Se da la siguiente solución básica factible:

Variables básicas

$$f_{4,6} = 2$$

$$f_{1,6} = 8$$

$$f_{1,3} = 2$$

$$f_{4,5} = 0$$

$$f_{1,2} = 0$$

Variables no básicas

$$f_{3,5} = 0$$

$$f_{2,4} = 0$$

$$f_{3,4} = 2$$

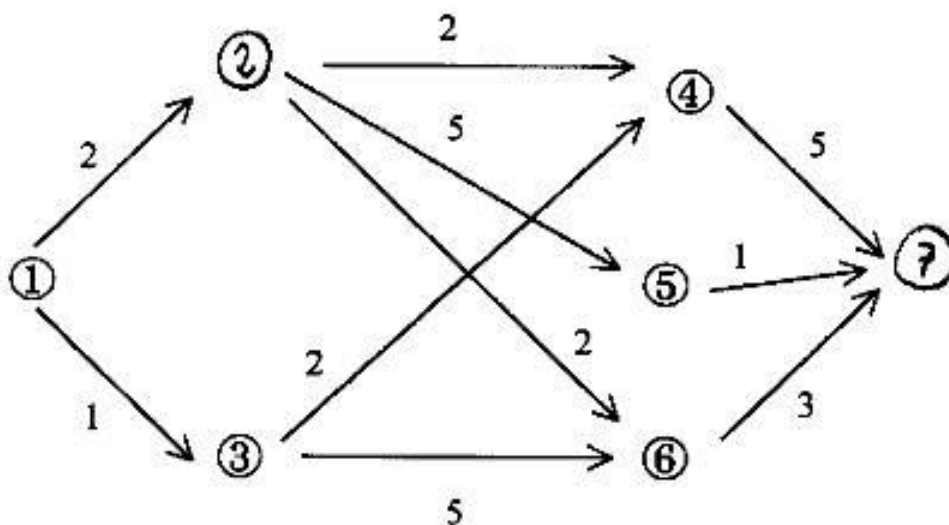
$$f_{5,6} = 0$$

Por cualquier arco la circulación mínima es nula.

Usando el algoritmo simplex especializado en redes encuentre los flujos por cada arco de tal manera de obtener el costo total de transporte mínimo. Sus cálculos deben partir de la solución básica dada.

IV.

- a) Utilice la programación dinámica para determinar la ruta más corta entre los nodos 1 y 7 del siguiente grafo. Diga cuales son las etapas, estados y variables de decisión.



- b) La demanda de un producto para los meses  $1, \dots, T$  es de  $d_1, \dots, d_T$  unidades. Este producto es importado por una única empresa que dispone de un almacén donde puede guardar hasta  $K$  unidades. El precio de compra de 1 unidad en el mercado internacional es  $c_t$  u.m. en el mes  $t$ . El producto comprado en un determinado mes y usado para satisfacer la demanda en ese mes no necesita ser almacenado. El costo de inventario en el mes  $t$  ( $h_t$  u.m. por unidad) es calculado en base a la cantidad al final del mes.

Sea  $F_t(s_t)$  el costo mínimo para los meses desde  $t$  hasta  $T$  si al inicio del mes  $t$  existen  $s_t$  unidades de producto en el almacén ( $0 \leq s_t \leq K$ ).

Obtenga una expresión para  $F_T(s_T)$  y plantee ecuaciones recursivas que permitan determinar  $F_t$  en términos de  $F_{t+1}$  para  $t < T$ .

I -

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se usa la caldera } i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3$$

$$Z_j = \begin{cases} 1 & \text{si se usa la turbina } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad j = 1, 2, 3$$

$V_i$  = cantidad de vapor (en toneladas) producida en la caldera  $i$   $i = 1, 2, 3$

$W_j$  = cantidad de energía (en kWh) producida en la turbina  $j$   $j = 1, 2, 3$

$$\min \sum_{i=1}^3 (t_i Y_i + f_i V_i) + \sum_{j=1}^3 (g_j Z_j + q_j W_j)$$

$$\text{s. a} \quad m_i Y_i \leq V_i \leq M_i Y_i \quad i = 1, 2, 3$$

$$m_j Z_j \leq \frac{W_j}{\ell_j} \leq N_j Z_j \quad j = 1, 2, 3$$

$$\sum_{i=1}^3 V_i \geq \sum_{j=1}^3 \frac{W_j}{\ell_j}$$

$$\sum_{j=1}^3 W_j \geq D$$

$$Y_1 + Z_3 \leq 1$$

$$Y_i = 0, 1 \quad V_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

$$Z_j = 0, 1 \quad W_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3$$

## Solución Examen

### Pregunta N.º 2

- a) El criterio de optimalidad del algoritmo simplex por sí solo asegura que un punto que lo cumple es un óptimo local. Gracias a la convexidad del espacio de soluciones factibles se puede afirmar que el óptimo es global.
- b) Si la solución óptima tiene solo 1 presión activa entonces hay solo una restricción activa. La solución óptima en consideración está en una cara del espacio de soluciones factibles. No es vértice y no pertenece a alguna arista en el caso de más de dos dimensiones.

c) Los precios sombra indican el máximo valor que se puede pagar por los recursos representados en las restricciones de un problema lineal.

Si el precio sombra es inferior al precio de mercado se ve la conveniencia de adquirir el recurso en cantidades para las cuales es válido el precio sombra. Estas cantidades se obtienen del análisis post-optimal del problema.

d) Si el cambio  $c_j$  se sigue cumpliendo el criterio de optimalidad, entonces los precios sombra se mantienen.

Si no se cumple el criterio de optimalidad cambian la solución óptima: como  $y^T = c_B B^{-1}$  entonces cambian los precios sombra.

e) Geométricamente una iteración consiste en cambiar de un vértice del espacio de soluciones factibles a otro adyacente.

Como el número de restricciones de un problema es finito, entonces el número de iteraciones

también lo será.  
Luego el número de iteraciones en el algoritmo  
simplex es finito.

f) La información no es correcta.

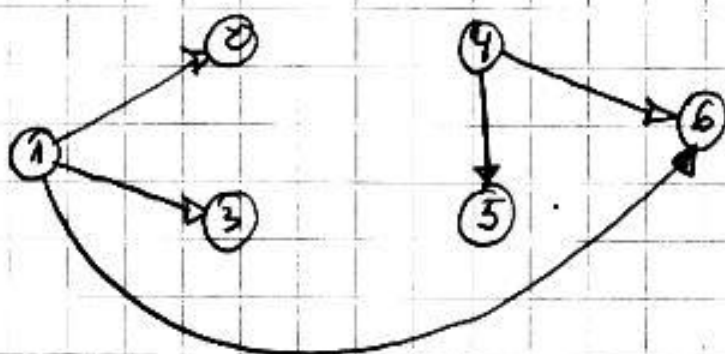
Si el hiperplano que representa la F.O. es paralelo  
a una arista del espacio de soluciones factibles  
(~~convexo~~) y en ella están las soluciones óptimas,  
no hay gradiente de restricciones que sea parale-  
lo al gradiente de la F.O. -

Por tanto no se podrá expresar el gradiente  
de la F.O. mediante 1 solo gradiente de  
restricción.



Pregunta n.º 3

Árbol generador asociado a la solución básica dada:



$$c_{4,6} = \pi_4 - \pi_6 = 1$$

$$\pi_4 = -24$$

$$c_{1,6} = \pi_1 - \pi_6 = 25$$

$$\pi_1 = 0 \quad \pi_6 = +25$$

$$c_{1,3} = \pi_1 - \pi_3 = 5$$

$$\pi_3 = -5$$

$$c_{4,5} = \pi_4 - \pi_5 = 3$$

$$\pi_5 = -27$$

$$c_{1,2} = \pi_1 - \pi_2 = 8$$

$$\pi_2 = -8$$

Cálculo de los costos modificados de las v. no básicas.

$$\bar{c}_{3,5} = c_{3,5} - (\pi_3 - \pi_5) = 1 - (-5 - (-27)) = -21 \quad \text{No cumple}$$

$$\bar{c}_{2,4} = 5 - (-8 - (-24)) = 5 - 16 = -11 \quad \text{" "}$$

$$\bar{c}_{3,4} = 3 - (-5 - (-24)) = 3 - 19 = -16 \quad \text{Cumple}$$

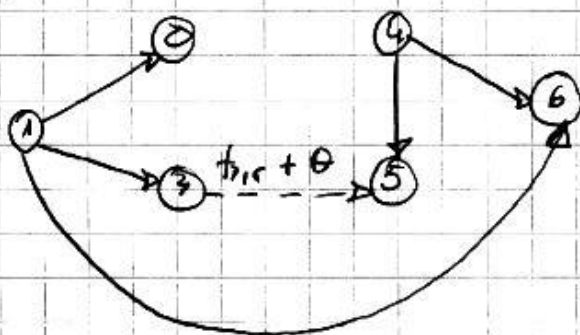
$$\bar{c}_{5,6} = 2 - (-27 - (-25)) = 2 - (-2) = +4 \quad \text{Cumple.}$$

No es solución óptima.



IT # 1.

• Ingresa  $f_{3,5}$



Se forma el ciclo 1-3-5-4-6

Interesa que  $f_{3,5}$  crezca al máximo y salga como variable básica alguna de las variables que integran el ciclo, de tal manera de obtener otra solución básica factible.

Del árbol vemos que  $f_{3,5}$  no puede tomar valores  $\neq 0$  ya que del nodo 5 en adelante no puede seguir el flujo.

Para obtener otra solución básica factible no podemos salir del árbol, todo lo que ~~que está transportando flujo~~ El mínimo que ~~que puede salir~~ es 4-5. Luego sale de la base  $f_{4,5}$

La única variable que sale sin problema es  $f_{4,5}$

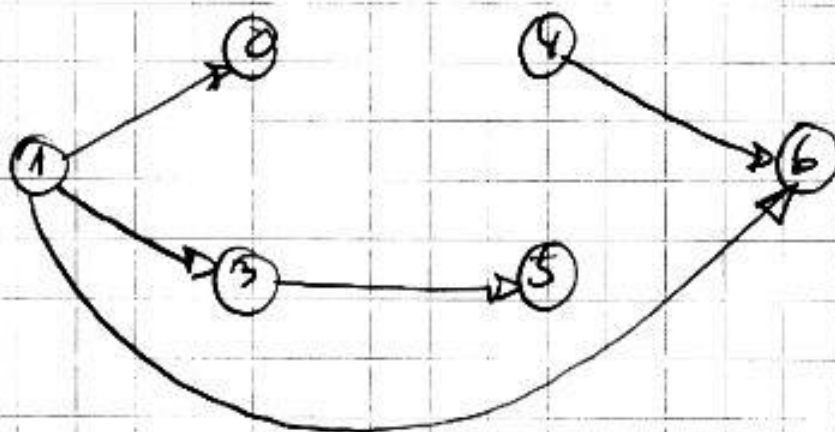
el valor de la F.O.  
ya que  $f_{3,4}$  debe  
ser mayor al valor 0

La nueva solución básica factible será:

N. básicas

$$\begin{aligned} f_{1,2} &= 0 \\ f_{1,3} &= 2 \\ f_{1,6} &= 8 \\ f_{3,5} &= 0 \\ f_{4,6} &= 2 \end{aligned}$$

N. no básicas

$$\begin{aligned} f_{4,5} &= 0 \\ f_{2,4} &= 0 \\ f_{3,4} &= 2 \\ f_{5,6} &= 0 \end{aligned}$$


\* Si vale  $f_{1,6}$  la solución obtenida sería no factible.  
Si vale  $f_{1,6}$  la solución a obtener aumentaría

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= \pi_1 - \pi_2 = 8 \\ c_{1,3} &= \pi_1 - \pi_3 = 5 \\ c_{1,6} &= \pi_1 - \pi_6 = 25 \\ c_{3,5} &= \pi_3 - \pi_5 = 1 \\ c_{4,6} &= \pi_4 - \pi_6 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0 & \pi_2 &= -8 \\ \pi_3 &= -5 \\ \pi_6 &= -25 \\ \pi_5 &= -6 \\ \pi_4 &= -24 \end{aligned}$$

Los modificados de n. no básicas:

$$\begin{aligned} \bar{c}_{4,5} &= 3 - (-24 - (-6)) = +21 \\ \bar{c}_{2,4} &= 5 - (-8 - (-24)) = -11 \\ \bar{c}_{3,4} &= 3 - (-5 - (-24)) = -16 \\ \bar{c}_{5,6} &= 2 - (-6 - (-24)) = -17 \end{aligned}$$

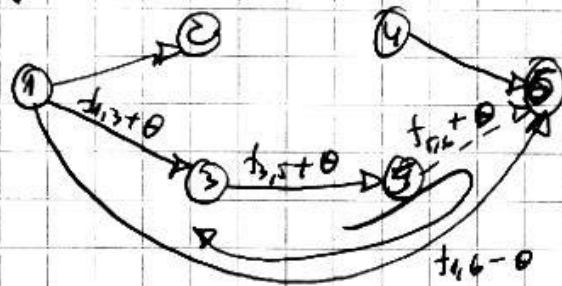
No cumple

No cumple

No es solución óptima.

IT #2.

• Ingresa  $f_{5,6}$



• Determinación de la n. general.

$$\text{Mini } \{ (11-2); (10-0) \} = 9 = d_1$$

$$\text{Mini } \{ (8-0) \} = 8 = d_2$$

$$\{ f_{5,6} - 0 \} = 9 = d_3$$

$$\text{Mini } \{ d_1, d_2, d_3 \} = 8.$$

sale  $f_{1,6}$ .  $\theta = 8$

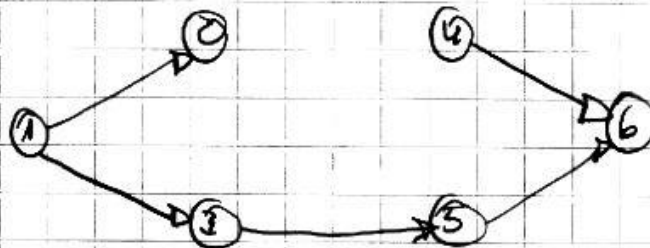
La nueva solución básica factible es:

n. básicas:

n. no básicas:

$$\begin{aligned} f_{1,2} &= 0 \\ f_{1,3} &= 10 \\ f_{3,5} &= 8 \\ f_{5,6} &= 8 \\ f_{4,6} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{4,5} &= 0 \\ f_{2,4} &= 0 \\ f_{1,4} &= 2 \\ f_{1,6} &= 0. \end{aligned}$$



$$c_{1,2} = \pi_1 - \pi_2 = 8$$

$$\pi_1 = 0 \quad \pi_2 = -8$$

$$c_{1,3} = \pi_1 - \pi_3 = 5$$

$$\pi_3 = -5$$

$$c_{3,5} = \pi_3 - \pi_5 = 1$$

$$\pi_5 = -6$$

$$c_{5,6} = \pi_5 - \pi_6 = 2$$

$$\pi_6 = -8$$

$$c_{4,6} = \pi_4 - \pi_6 = 1$$

$$\pi_4 = -7$$

Calculo de cots modificados de v. no base:

$$\overline{c_{4,5}} = 3 - (-7 - (-6)) = +4$$

$$\overline{c_{2,4}} = 5 - (-8 - (-7)) = +6$$

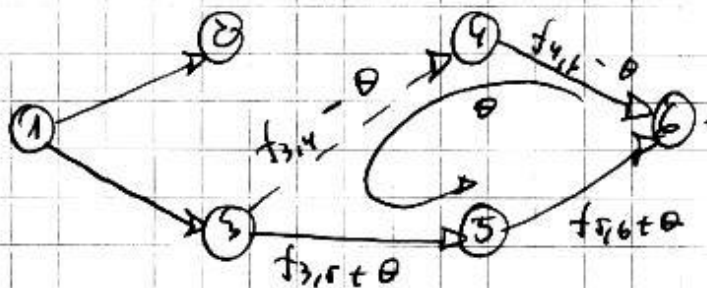
$$\overline{c_{3,4}} = 3 - (-5 - (-7)) = +1$$

$$\overline{c_{1,6}} = 25 - (0 - (-8)) = +17$$

no cumple.

IT #3

Ingresar  $f_{3,4}$  (En cota superior)



$$\min \{ (10-0), (9-0) \} = 1 = d_1$$

$$\min \{ (2-0), ~~(1-0)~~ \} = 2 = d_2$$

$$~~(1-0)~~ (2-0) = 2 = d_3$$

$$\min \{ d_1, d_2, d_3 \} = 1$$

$$\theta = 1$$

Se le  $f_{3,4}$ , quedando en cota superior.

La nueva solución básica es:

N. básicas

$$\begin{aligned} f_{1,2} &= 0 \\ f_{1,3} &= 10 \\ f_{3,4} &= 1 \\ f_{4,6} &= 1 \\ f_{3,5} &= 9 \end{aligned}$$

N. no básicas

$$\begin{aligned} f_{2,4} &= 0 \\ f_{4,5} &= 0 \\ f_{5,6} &= 9 \\ f_{1,6} &= 0. \end{aligned}$$

$$c_{1,2} = \pi_1 - \pi_2 = 8$$

$$\pi_1 = 0$$

$$\pi_2 = -8$$

$$c_{1,3} = \pi_1 - \pi_3 = 5$$

$$\pi_3 = -5$$

$$c_{3,4} = \pi_3 - \pi_4 = 3$$

$$\pi_4 = -8$$

$$c_{4,6} = \pi_4 - \pi_6 = 1$$

$$\pi_6 = -9$$

$$c_{3,5} = \pi_3 - \pi_5 = 1$$

$$\pi_5 = -6$$

$$\bar{c}_{2,4} = 5 - (-8 - (-8)) = +5$$

Simple

$$\bar{c}_{4,5} = 3 - (-8 - (-6)) = +5$$

$$\bar{c}_{5,6} = 2 - (-6 - (-9)) = -1$$

$$\bar{c}_{1,6} = 25 - (0 - (-9)) = +16$$

4

4

11

(Lota Superior)

La solución básica actual es óptima.

IV a) Etapas  $\rightarrow 1, 2, 3$

Estados  $\rightarrow$  nodos del grafo  $s = 1, \dots, 7$

variables de decisión  $\rightarrow x_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) representan el destino en la etapa  $i$

$f_i(s_i)$  = costo de la ruta óptima desde el estado  $s_i$  (origen en la etapa  $i$ ) hasta el estado final 7

Sea  $c_{sx}$  el costo del arco  $(s, x)$

$$f_3(s_i) = c_{s_i 7}$$

$$f_i(s_i) = \min_{x_i} \{ c_{s_i x_i} + f_{i+1}(x_i) \} \quad i=2, 3$$

$$f_3(4) = 5 \quad x_3^* = 7$$

$$f_3(5) = 1 \quad x_3^* = 7$$

$$f_3(6) = 3 \quad x_3^* = 3$$

$$f_2(2) = \min_{x_2 \in \{4, 5, 6\}} \{ c_{2x_2} + f_3(x_2) \} = c_{26} + f_3(6) = 5 \quad x_2^* = 6$$

$$f_2(3) = \min_{x_2 \in \{4, 6\}} \{ c_{3x_2} + f_3(x_2) \} = c_{34} + f_3(4) = 7 \quad x_2^* = 4$$

$$f_1(1) = \min_{x_1 \in \{2, 3\}} \{ c_{1x_1} + f_2(x_1) \} = c_{12} + f_2(2) = 7 \quad x_1^* = 2$$

la ruta óptima es  $(1, 2, 6, 7)$  con costo 7.

IV  
b)

Sea  $x_t$  la cantidad comprada en el mes  $t$  ( $t=1, \dots, T$ )

$$f_T(s_T) = \min_{\substack{x_T \leq K - s_T + d_T \\ x_T \geq d_T - s_T \\ x_T \geq 0}} \{ c_T x_T + h_T (s_T + x_T - d_T) \}$$

$$f_t(s_t) = \min_{\substack{x_t \leq K - s_t + d_t \\ x_t \geq d_t - s_t \\ x_t \geq 0}} \{ c_t x_t + h_t (s_t + x_t - d_t) + f_{t+1}(s_t + x_t - d_t) \} \quad (t < T)$$

ALTERNATIVA: se tiene  $s_{t+1} = s_t + x_t - d_t$

$$f_T(s_T) = \min_{\substack{0 \leq s_{T+1} \leq K \\ s_{T+1} \geq s_T - d_T}} \{ c_T (s_{T+1} - s_T + d_T) + h_T s_{T+1} \}$$

$$f_t(s_t) = \min_{\substack{0 \leq s_{t+1} \leq K \\ s_{t+1} \geq s_t - d_t}} \{ c_t (s_{t+1} - s_t + d_t) + h_t s_{t+1} + f_{t+1}(s_{t+1}) \}$$