Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A Optimización
Profesor: Richard Weber
Guillermo Duran
Auxiliares: Blas Duarte
Marianela Pereira

CTP Nº 2
06 de Mayo de 2005

La hermosa e inteligente estudiante de Ingeniería Lena está profundamente preocupada para mantener su dieta. Para esto debe racionalizar la cantidad de golosinas que son de i tipos.

Cada golosina i tiene con una cantidad CA_i por gr. de golosina, se sabe que la cantidad máxima de calorías semanales que puede consumir Lena es de MC.

Cada golosina i tiene un precio P_i por gr. Lena tiene un presupuesto semanal de $PPTO$ para gastar en este tipo de alimentos.

El beneficio de comer un gr de golosina i está dado por BEN_i. y se sabe que Lena desea maximizar el beneficio semanal por comer estas exquisiteces.

1. Formule un modelo de PL que permita decidir la cantidad de gr. semanales de golosinas de cada tipo que consume Lena.

2. Si se tiene solo dos tipos de golosinas: galletones y alfajores; con los datos siguientes resuelva el problema aplicando el algoritmo simplex empezando desde el origen.

Parámetro	Galletones	Alfajores
CA_i	4	3
P_i	100	200
BEN_i	6	5

MC = 17 PPTO = 800

Indicación:
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3. Indique qué ocurre con la solución óptima (restricciones activas/inactivas) si:
Indicación: Puede ser más fácil analizar a través de análisis gráfico.

a) Ahora luce mucho más esbelta y se da el lujo de consumir 15 calorías semanales más en golosinas.

b) El precio del gr. de alfajor disminuye a 2400/17.

4. a) Si Lena sintiese menos beneficio al consumir alfajores ¿Cuando puede disminuir el beneficio de cada gr. de alfajor ingerido para que siga consumiendo de este producto?

b) Si Lena tiene una creciente adicción por los alfajores, es decir aumenta su beneficio por gr. consumido de estos. ¿Para que valor de este beneficio su maníaca adicción la obliga a dejar de comer galletones?

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A Optimización
Profesor: Richard Weber
Guillermo Duran
Auxiliares: Blas Duarte
Marianela Pereira

Pauta CTP 2
06 de Mayo de 2005

1.-Variables Decisión:

X_1 Cantidad de gr. de galletones que Lena consume semanalmente.
X_2 Cantidad de gr. de alfajores que Lena consume semanalmente.

max	$6X_1+5X_2$	
s.a.	$4X_1+3X_2 \leq 17$	No superar Nivel de Calorías
	$100X_1+200X_2 \leq 800$	No superar cantidad de horas disponibles.
	$X_1, X_2 \geq 0$	

2.- Empezando desde el origen:

$$\begin{aligned} \min\ & -6X_1-5X_2 \\ s.a.\ & 4X_1+3X_2 \leq 17 \\ & X_1+2X_2 \leq 8 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$B = \begin{array}{c} X_3 \quad X_4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow R = \begin{array}{c} X_1 \quad X_2 \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B = I^{-1} \rightarrow \bar{b} = b = \begin{pmatrix} 17 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (-6,-5) \leq 0$$

Esto quiere decir que no estamos en el óptimo y que X_1 debe entrar a la base

Criterio de Salida:

$$\min\left\{ \overset{X_3}{\frac{17}{4}}, \overset{X_4}{\frac{8}{1}} \right\} = \frac{17}{4}$$

X_3 sale de la base

<u>Iteración 1</u>

$$B = \begin{array}{c} X_1 \quad X_4 \\ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow R = \begin{array}{c} X_3 \quad X_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{b} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 17/4 \\ 15/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (0,-5) - (-6,0) \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = (0,-5) + (6/4, 18/4) = (\underset{X_3}{6/4}, \underset{X_2}{-2/4})$$

Esto quiere decir que no estamos en el óptimo y que X_2 entra a la base.

$$\overline{A}_{\bullet} = B^{-1} \cdot A_{\bullet 2} = B^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}$$

Criterio de Salida:

$$\min\left\{ \overset{X_1}{\frac{17/4}{3/4}}, \overset{X_4}{\frac{15/4}{5/4}} \right\} = 3$$ *X*$_4$ sale de la base

<u>Iteración 2:</u>

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} X_1 & X_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow R = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} X_3 & X_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & -3/5 \\ -1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$\overline{b} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

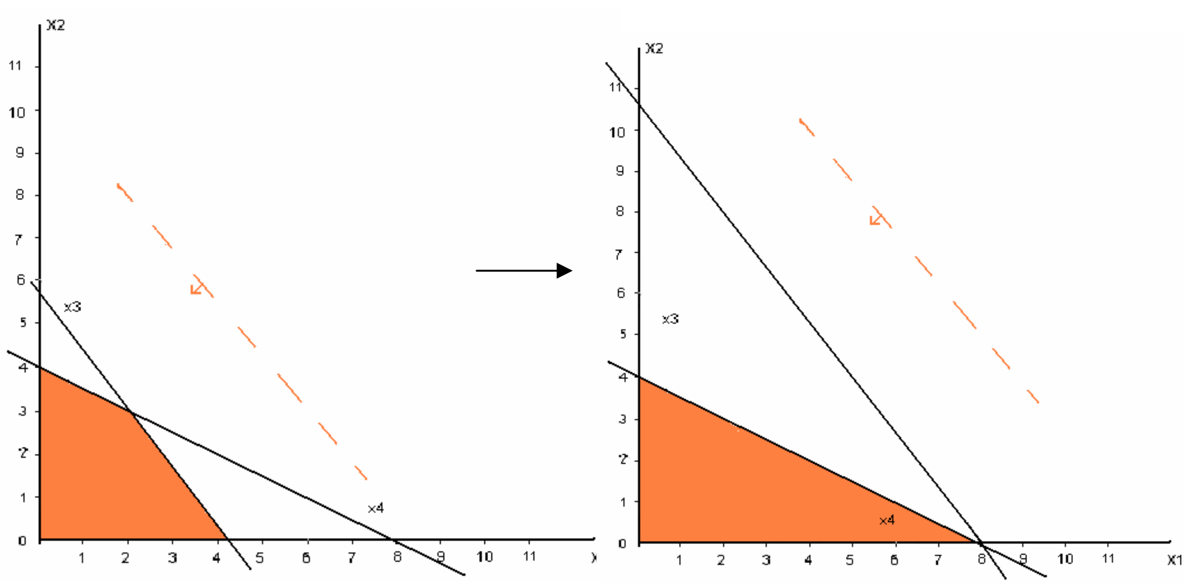
$$\overline{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (0,0) - (-6,-5)\begin{pmatrix} 2/5 & -3/5 \\ -1/5 & 4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{c}_R = (0,0) + (6,5) = (7/5, 2/5) \geq 0 \Rightarrow \textit{óptimo}$$

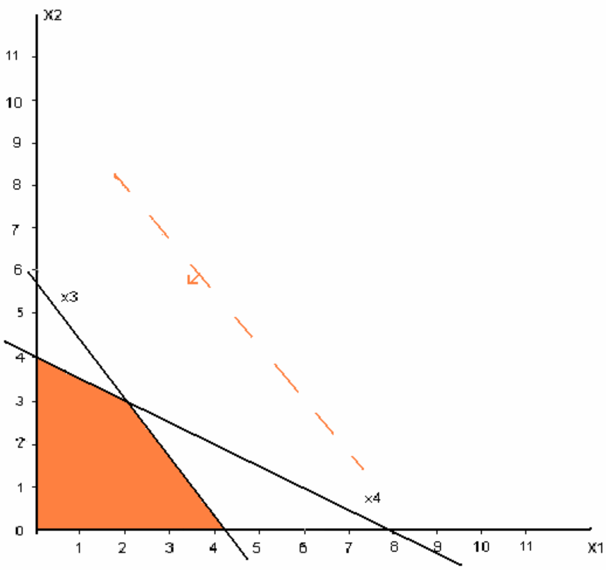
$$z = 2 \cdot 6 + 5 \cdot 3 = 37 = z^*$$

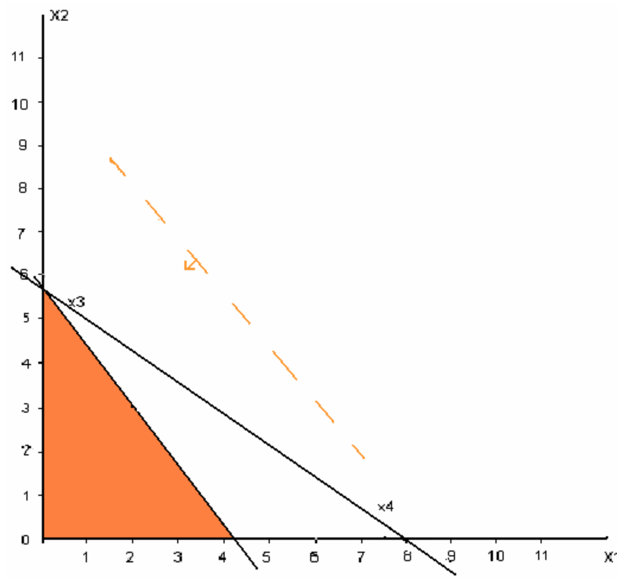
Observemos que, en el óptimo, ambas restricciones son activas.

3.- a) Si se da el lujo de consumir 15 calorías semanales más, la restricción se traslada positivamente en los ejes como se muestra en la figura a continuación. Así el nuevo óptimo se traslada al punto X_1=8 y X_2=0 con las variables de holgura X_4=0 y X_3=0, así se observa que ambas restricciones son activas en el nuevo óptimo. La función objetivo es de 48. Se puede observar que el punto óptimo es degenerado.



b) Si el precio del alfajor disminuye a 2400/17 se tiene que la pendiente de la restricción asociada a x_4 cambia quedando la figura que se observa a continuación, donde el óptimo se traslada al punto $X_1=0$ y $X_2= 17/3$ con las variables de holgura $X_4=0$ y $X_3=0$, así se observa que ambas restricciones son activas en el nuevo óptimo. La función objetivo en este punto es de 85/3
Se puede observar que el punto óptimo es degenerado.





4.- a) En el problema inicial se tiene que

Así si se consideran *c = (6,c_2)* arbitrarios.

$$\overline{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (0,0) - (-6,-c_2)\begin{pmatrix} 2/5 & -3/5 \\ -1/5 & 4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{c}_R = (0,0) + (6,c_2)\begin{pmatrix} 2/5 & -3/5 \\ -1/5 & 4/5 \end{pmatrix} = (\underbrace{\frac{12}{5} - \frac{c_2}{5}}_{X_3}, \underbrace{-\frac{18}{5} + \frac{4c_2}{5}}_{X_4}) \geq 0 \Rightarrow \textit{óptimo}$$

- X_4 entra a la base si el costo reducido asociado se hace negativo lo que sucede cuando:

$c_1 \leq 18/4$

Si esto sucede nos movemos al punto (17/4,0) lo que implica que Lena deja de comer alfajores en el punto tal que c_1<18/4. Así para no dejar de comer de este tipo de golosinas el beneficio asociado a comer debe ser mayor a 18/4.

Otra forma de verlo es cuando la pendiente de la f. o se iguala a la pendiente de la primera restricción, lo que sucede cuando $c_1 = 18/4$.

b) En el problema inicial se tiene que

Así si se consideran *c = (6,c_2)* arbitrarios.

$$\overline{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (0,0) - (-6,-c_2)\begin{pmatrix} 2/5 & -3/5 \\ -1/5 & 4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{c}_R = (0,0) + (6,c_2)\begin{pmatrix} 2/5 & -3/5 \\ -1/5 & 4/5 \end{pmatrix} = (\underbrace{\frac{12}{5} - \frac{c_2}{5}}_{X_3}, \underbrace{-\frac{18}{5} + \frac{4c_2}{5}}_{X_4}) \geq 0 \Rightarrow \textit{óptimo}$$

- X_3 entra a la base si el costo reducido asociado se hace negativo lo que sucede cuando:

$c_2 \geq 12$

Si esto sucede nos movemos al punto (0,4) lo que implica que Lena deja de comer galletones en el punto tal que $c_2 > 12$. Así para no dejar de comer galletones su adicción debe estar lo suficientemente controla da como para que el beneficio asociado a comer de este producto puede aumentar solo hasta 12. Otra forma de verlo es cuando la pendiente de la f. o se iguala a la pendiente de la segunda restricción, lo que sucede cuando $c_2 = 12$

Notas de corrección:

Cada parte vale 1,5.

A) 0.3 por cada restricción (son 3), 0.3 por las variables y 0.3 por la FO.
B) Lo más importante es que los criterios estén buenos y las iteraciones bien hechas, si un criterio está mal empleado (factibilidad, optimalidad, entrada o salida de la base) restar de inmediato 0.5. No penalizar mucho por errores numéricos, sino por errar en ocupar el algoritmo.
C) Es suficiente con decir que restricciones son activas y no activas en el nuevo óptimo y explicitar dicho punto.
D) Da lo mismo si lo hacen gráficamente o con el algoritmo pero que la intuición esté correcta.