Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A Optimización
Profesor: Richard Weber
Guillermo Duran
Auxiliares: Blas Duarte
Marianela Pereira

CTP Nº 2
05 de Mayo de 2005

Nuestro estimado Black Suerte está enfrentando problemas para decidir cómo administrar el poco tiempo libre que tiene cada semana. Este tiempo lo puede dedicar a dos actividades: visitar a los amigos o visitar a su novia.

Por cada hora que dedica a visitar a sus amigos Black necesita 1 unidad de energía, mientras que cada hora que dedica a visitar a su novia requiere de 3 unidades de energía (por la dificultad de acceso para llegar a la casa de su novia). El stock semanal de energía de nuestro amigo es de 10 unidades.

Cada hora que Black dispone para pasar con sus amigos le entrega 4 unidades de satisfacción, y, dado que está profundamente enamorado, cada hora que pasa con su novia le proporciona 8 unidades de satisfacción.

Black dispone de cuatro horas libres semanales las que desea ocupar en las distintas actividades para maximizar su satisfacción.

1. Formule un modelo de PL que permita decidir la cantidad de horas semanales que dedica Black a cada actividad.

2. Resuelva el problema aplicando el algoritmo simplex empezando desde el origen.
Indicación:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3. Indique qué ocurre con la solución óptima (restricciones activas/inactivas) si:
Indicación: Puede ser más fácil analizar a través de análisis gráfico.

a) Ahora su familia vive mucho más lejos y la energía necesaria por hora de visita aumenta a 2,5.

b) Su disponibilidad de tiempo aumenta a 10 horas semanales.

4. a) Si Black ya no siente lo mismo por su novia: ¿Cuánto puede disminuir el beneficio de las horas que pasa con ella para que siga visitándola?

b) Si el amor de Black por su novia aumenta, por tanto su beneficio por pasar horas con ella también lo hace: ¿cuánto puede aumentar su amor de manera que Black siga visitando a sus amigos?

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A Optimización
Profesor: Richard Weber
Guillermo Duran
Auxiliares: Blas Duarte
Marianela Pereira

Pauta CTP 2
05 de Mayo de 2005

1.-Variables Decisión:

X_1 Cantidad de horas semanales que Black dedica a su novia.
X_2 Cantidad de horas semanales que Black dedica a sus amigos

max	$8X_1 + 4X_2$	
s.a.	$3X_1 + X_2 \leq 10$	No superar Nivel de Esfuerzo
	$X_1 + X_2 \leq 4$	No superar cantidad de horas disponibles.
	$X_1, X_2 \geq 0$	

2.- Empezando desde el origen:

min	$-8X_1 - 4X_2$	
s.a.	$3X_1 + X_2 \leq 10$	No superar Nivel de Esfuerzo
	$X_1 + X_2 \leq 4$	No superar cantidad de horas disponibles.
	$X_1, X_2 \geq 0$	

$$B = \begin{array}{cc} X_3 & X_4 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{array}{cc} X_1 & X_2 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = I^{-1} \rightarrow \bar{b} = b = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (-8,-4) \leq 0$$

Esto quiere decir que no estamos en el óptimo y que X_1 debe entrar a la base

Criterio de Salida:

$$\min \left\{ \underset{X_3}{\frac{10}{3}}, \underset{X_4}{\frac{4}{1}} \right\} = \min\{3.33, 4\} = 3.33$$

X_3 sale de la base

<u>Iteración 1</u>

$$B = \begin{array}{cc} X_1 & X_4 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{array}{cc} X_3 & X_2 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{b} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (0,-4) - (-8,0) \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = (0,-4) + (8/3, 8/3) = (\underset{X_3}{8/3}, \underset{X_2}{-4/3})$$

Esto quiere decir que no estamos en el óptimo y que X_2 entra a la base.

$$\overline{A}_{\bullet} = B^{-1}\cdot A_{\bullet 2} = B^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\1\end{pmatrix}$$

Criterio de Salida:

$$\min\left\{\overset{X_1}{\frac{10/3}{1/3}}, \overset{X_4}{\frac{2/3}{1}}\right\} = \min\left\{10, 2/3\right\} = 2/3$$

X_4 sale de la base

<u>Iteración 2:</u>

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} X_1 & X_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \end{array} \rightarrow R = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} X_3 & X_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ -1/2 & 3/2\end{pmatrix}$$

$$\overline{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

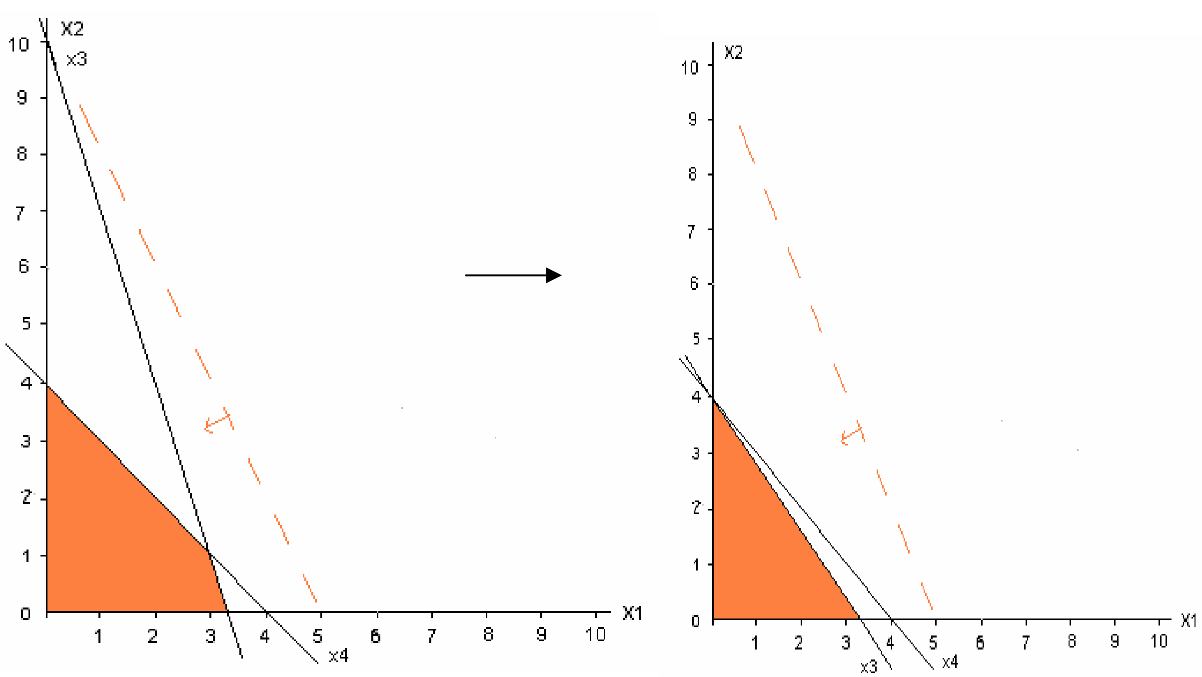
$$\overline{c}_R = c_R - c_B B^{-1}R = (0,0) - (-8,-4)\begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ -1/2 & 3/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\overline{c}_R = (0,0) + (2,2) = (2,2) \geq 0 \Rightarrow \textit{óptimo}$$

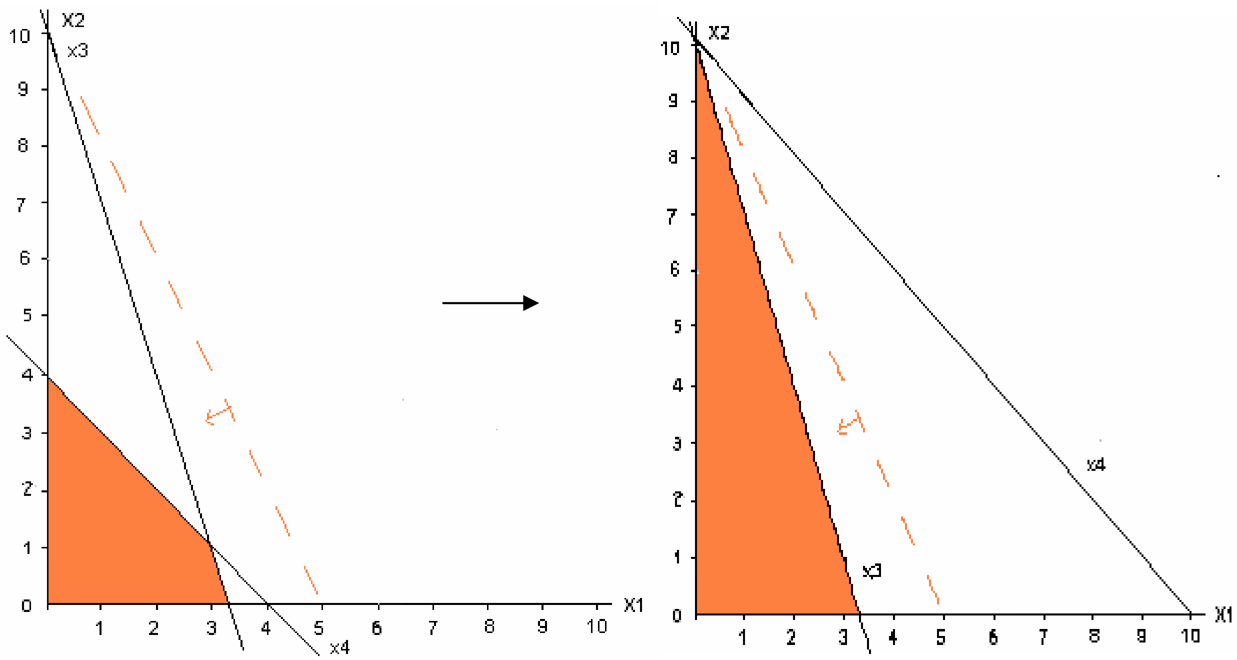
$$z = 3\cdot 8 + 4\cdot 1 = 28 = z^*$$

Observemos que, en el óptimo, ambas restricciones son activas.

3.- a) Si el esfuerzo necesario para ver a la familia aumenta a 2,5 la pendiente de la restricción asociada a x_3 cambia quedando la figura que se observa a continuación, donde el óptimo se traslada al punto $X_1=10/3$ y $X_2=0$ con las variables de holgura $X_4>0$ y $X_3=0$, así se observa que las restricciones activas en el nuevo óptimo se reducen a la restricción correspondiente a la energía requerida para cada vista. La función objetivo en este punto es de 80/3.



b) Si la disponibilidad de tiempo aumenta a 10 hrs. La restricción se traslada positivamente en los ejes como se muestra en la figura a continuación. Así el nuevo óptimo se traslada al punto $X_1=0$ y $X_2=10$ con las variables de holgura $X_4=0$ y $X_3=0$, así se observa que ambas restricciones son activas en el nuevo óptimo. La función objetivo es de 40. Se puede observar que el punto óptimo es degenerado.



4.- a) En el problema inicial se tiene que

Así si se consideran $c = (c_1, 4)$ arbitrarios.

$$\bar{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (0,0) - (-c_1,-4)\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = (0,0) + (c_1,4)\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} = (\underset{X_3}{\frac{c_1}{2} - 2}, \underset{X_4}{\frac{-c_1}{2} + 6}) \geq 0 \Rightarrow \textit{óptimo}$$

- X_3 entra a la base si el costo reducido asociado se hace negativo lo que sucede cuando:

$c_1 \leq 4$

Si esto sucede nos movemos al punto (0,4) lo que implica que Black deja de ver a su novia en el punto tal que $c_1<4$. Así para no dejar de verla el beneficio asociado a visitarla puede disminuir hasta 4.
Otra forma de verlo es cuando la pendiente de la f. o se iguala a la pendiente de la segunda restricción, lo que sucede cuando $c_1 = 4$

b) En el problema inicial se tiene que

Así si se consideran *c = (c₁,4)* arbitrarios.

$$\overline{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (0,0) - (-c_1,-4)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{c}_R = (0,0) + (c_1,4)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = (\underbrace{\frac{c_1}{2} - 2}_{X_3}, \underbrace{\frac{-c_1}{2} + 6}_{X_4}) \geq 0 \Rightarrow \textit{óptimo}$$

- X_4 entra a la base si el costo reducido asociado se hace negativo lo que sucede cuando:

$c_1 \geq 12$

Si esto sucede nos movemos al punto (10/3,0) lo que implica que Black deja de ver a sus amigos en el punto tal que $c_1>12$. Así para no dejar de verlos el beneficio asociado a visitar a la novia no puede ser más de 12.

Otra forma de verlo es cuando la pendiente de la f. o se iguala a la pendiente de la primera restricción, lo que sucede cuando $c_1 = 12$.

Notas de corrección:

Cada parte vale 1,5.

A) 0.3 por cada restricción (son 3), 0.3 por las variables y 0.3 por la FO.
B) Lo más importante es que los criterios estén buenos y las iteraciones bien hechas, si un criterio está mal empleado (factibilidad, optimalidad, entrada o salida de la base) restar de inmediato 0.5. No penalizar mucho por errores numéricos, sino por errar en ocupar el algoritmo.
C) Es suficiente con decir que restricciones son activas y no activas en el nuevo óptimo y explicitar dicho punto.
D) Da lo mismo si lo hacen gráficamente o con el algoritmo pero que la intuición esté correcta.